This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

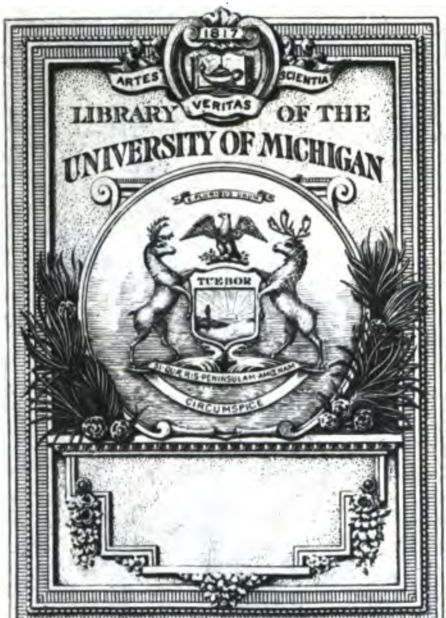
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

QA
33
T119e
1672



ELEMENTA GEOMETRIÆ PLANÆ AC SOLIDÆ.

QVIBVS ACCEDVNT SELECTA

EX ARCHIMEDE THEOREMATA.

AVCTORE
ANDREA TACQVET
SOCIETATIS IESV
Sacerdote & Matheſeos Profeſſore.

*Quid noui in vtriſq; præſtitum ſit, præ-
fatio ad Lectorem indicabit.*

EDITIO TERTIA CORRECTIOR.



ANTVERPIÆ,
Apud IACOBVM MEVRSIVM.
ANNO M. DC. LXXII.

QA
331
T119e
1672

ILLVSTRISSIMO
DOMINO
D. PHILIPPO EVGENIO
COMITI DE HORNES,
HOVTEKERCKE ET DE HERLIES,
VICE-COMITI FVRNENSI,
BARONI DE HONDSCOTE,
DOMINO DE LA BASSÉE, L'ECLVSE,
Tranſloy, Braine le Chaſteau, Haut Ittere, Stauele, Crombecque, Eſtehain, Durry, Eſterpinij, &c.

Magno Imperij Venatori Hereditario, Turmæ equitum pro Rege Catholico Ductori.

ILLVSTRISSIME DOMINE Matheſis ſcientiarum omnium naturalium eo titulo nobiliſſima, quod inter omnes vna certiſſima, veriſſimaque ſit, honoratam ſe fuiſſe fatetur etiamnum, à nobiliſſima indole & ingenio Tuo; quando illam addiſcere me inſtituente, at-

que ad ingens exemplum nobilitatis Belgicæ, & admirationem, gratulationemq; non inanem auditorum omnium, annis ab hinc tribus præclarè tueri, publicè propoſitis Theſibus, me præſidente voluiſti. Quamquam hoc quidquid tunc à me geſtum eſt, honori datum eſt, non auxilio Tuo: cui ſatis ſuperque ſubſidij erat à ſtudio & ingenio ſuo, vt diſciplinam illam ſecurè defenderet, quam poſſideret. Tua iſta merita cogitantem me impulêre, vt hæc Geometriæ Elementa non alteri quam Tuo Illuſtriſſimo Nomini inſcriberem. In quibus quid ſpectarim, quidúe aſſecutus ſim, fruſtra hîc exponam apud Te, qui pro Tua perſpicacitate ingenij cognoſces ilico, cum videbis.

Perge modo (patieris enim, ſcio, etiam nunc abs me admoneri Te de ſtudio tam nobili & tam præclaro) Perge, inquam, æſtimare & amare diſciplinam, quam ego iudico excellente nobilitate dignam, quia

vnam,

vnam, & eminentem ſibi vendicauit inter omnes; ſummis parem inge- nijs, quia veram; quin & mihi boniſ- ſimi etiam religioſa conuenientem, quia bonam, hoc eſt omnino remo- tam à periculis illis, in quæ ſubinde diſciplinæ aliæ diſcentium vitio & errore declinant. Habet ſanè Geo- metria, quod & ego , & multi me- cum experti ſunt doctiſſimi iuxta & innocentiſſimi viri , quo hominis animum ſibi deditum, ex contem- platione vnius, veri, boniq́ue cor- poris attollant ad laudandum, amã- dumq́ue vnum, verum, bonum, hoc eſt Deum incorporeum, & immen- ſum dimenſi corporis Architectum. Huc te meq́; ducant hæc Elemen- ta Geometrica , quæ inſcribo Tibi; cùmq́ue arcanam admirandamq́ue & pluſquàm harmonicam vario- rum inter ſe corporum , & ipſius adeò Circuli ſphæræq́ue conſen- ſionem animo ſuggerent, doceant hunc ipſum cum Deo , mente illa primâ & immensâ, & quodam quaſi

circulo omnia in ſe creata, & diuina complectente, conſentire. Hoc vpueo, & finio cum lemmate, quod Emblemati præfixo fronte primâ, ex profano licet Horatio, non profane ſubſcripſi.

Hinc omne principium huc refer exitum.

Illuſtriſſime Domine

D^nis. T^æ. Illuſtriſſimæ

Seruus in Domino

Andreas Tacqvet

Soc. Iesv.

AMICE LECTOR.

CVm multis iam annis Elementorum Geometricorum, minoris formæ, in hiſce locis penuriâ laboratum eſſet, viſum demique eſt ad vſum ſtudioſæ iuuentutis, cuius gratiâ hunc laborem qualemcunque ſuſcepi, nouam editionem adornare; in qua quid præſtitum ſit, paucis accipe.

1\. *Inprimis Geometriæ planæ ac ſolidæ elementa coniunxi, ne (vt fit plerunque) ſemper in planis tyrones hæreant; ſed ab his tranſeant ad ſolida; quorum ſummè neceſſaria cognitio eſt.*

2\. *Propoſitionum hypotheſibus & aſſertionibus litteras, parentheſi incluſas, quibus ad figuram referri poſſint, appoſui; quod eò conſilio feci, ne ante demonſtrationem, iterum explicanda aſſertio, adeoq; idem bis repetendum eſſet: & tamen litteris à reliquo ſenſu parentheſi ſeparatis, ſua aſſertioni vniuerſalitas conſtaret. Aſſertionem igitur conueniet legere primum litteris prætermiſſis; tum ſi non intelligas, te litteræ ad figuram ducent.*

3\. *Propoſitiones aliquas prætermiſi, quarum ferè vel nullus vſus eſt, aut certè non alius, quam vt per eas demonſtrentur aliæ, quas ſine illis faciliori viâ poteram demonſtrare. Eoſdē tamen propoſitionū retineo numeros, quos Euclides, ordinemq; ſeruo, quem bis mille annorum vſus probauit.*

 4. De-

4. Demonſtrationes vel nouas affero, vel antiquas breuiores plerumque ac faciliores conor efficere. Et prolixitas quidem raro prodeſt. Ea ſiquidem tardiores & hebetiores non iuuat, ſubtilibus autem & ingenioſis moleſta eſt.

5. Quamuis autem breuis eſſe ſtuduero, exiſtimaui tamen, me à propoſito non recedere, ſi ea adderem, quæ Geometriam diſcere volentibus futura uſui videbantur. Itaque Corollaria & ſcholia adiunxi non pauca, quæ uſu longo didici in elementis deſiderari. Geometriæ practicæ fontes indico ſuis locis. Tum ſiquid illuſtre ad rem occurreret, non omiſi. Varia deinde in quibus laboratum hucuſque fuit, vel explicare vel demonſtrare conatus ſum.

6. In libro primo parallelarum theoria demonſtratur independenter ab undecimo axiomate, quod non axioma, ſed theorema eſt, & quidem non niſi difficulter ac longo circuitu demõſtrabile.

7. Secundum librum, in quo laborare multum tyrones ſolent, diſpoſui ad eum fere modũ, quo iam analyſtæ ſcribunt æquationes ſuas. Quem ſi exactè tenere voluiſſem, fuiſſet quidem res breuior; ſed minus, ut arbitror, tyronibus accommodata.

8. In libro tertio ad prop. 16. paradoxa anguli contactus, quæ hactenus torſêre omnes, ſoluuntur.

9. In quinto libro proportionum doctrinam, ut quidem ab Euclide traditur ſatis ſpinoſam, efficere planiorem conatus ſum. Itaq; primum proportionum elementa, faciliori quadam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur. Deinde huius libri

ſextam

ſextam definitionem, quâ proportionum æqualitas per multiplices explicatur oſtendi non definitionem eſſe, ſed theorema, & quidem difficile & perobſcurum; cuius etiam demonſtrationem exhibemus, hactenus à nullo datam. Atque ita demonſtrationes Euclidæas quæ hinc ducuntur omnes, ſi quis fortè illas præ noſtris probationibus, deſideret, ſtabiliuimus. Tum aliud quoddam æqualium proportionum aſſignò ac demonſtro indiciū vniuerſale, primum, facillimum, ex quo omnes quinti libri propoſitiones demonſtrare potuiſſe ſi hoc conducere diſcentibus iudicaſſem. Poſtremò de proportionibus non pauca ſcitu neceſſaria ſubiungo, ac inprimis demonſtro axioma illud percelebre ſeu potiùs theorema: proportionem extremorum ex quotlibet intermediorum proportionibus componi, id quod hactenus in Geometriâ fuit deſideratum.

10. Librum duodecimum, cuius difficiles ac prolixæ demonſtrationes diſcentibus terrori eſſe ſolent, aliâ viâ plus quā decies breuiori demonſtraui. Quod ita ſe habere, qui hæc noſtra cum Euclide eiuſq; commentatoribus contulerit, deprehendet.

11. In libris quarto, ſexto, vndecimo præſtantur ea quæ vniuerſim ſupra indicauimus.

12. Denique ſelecta ex Archimede theoremata aliâ ſimiliter ac breuiori viâ demonſtrata adiunxi; eximiamq; illius de cylindro ac ſphæra doctrinā poſtremis tredecim propoſitionibus adiectis, amplia ui, quibus inter cætera demonſtro ſeſquialteram proportionem ab eo in cylindro ſphæraq; reperiam.

pertam, ab æquilatero cono eidem ſphæræ circumſcripto, tam in ſoliditate, quàm in ſuperficie continuari. Euclidi porro Archimedæa illa ſubnexui; non quaſi adhuc elementa, ſed quia ſubtilitate pariter atque vſu eximia ſunt: tum deinde vt Geometriæ candidatus intelligat, cum maximi Geometræ inuenta admiranda aſſequi ſeſe viderit, nihil in Matheſi futurum tam ſubtile vel arduum, quod his inſtructus elementis percipere non poſſit.

Tu hæc habe; & , ſi placuerint, lege ac diſce inuenturus in his principia nobiliſſimæ & fortè omnium antiquiſſimæ ſcientiæ; quod oſtendet tibi, quam ſubnecto.

HISTO-

HISTORICA NARRATIO

De ortu & progreſſu Matheſeos.

MAthematum elementa tradituro, viſum eſt de illorum origine ac præſtantia præfari quædam, vt intelligant Matheſeos candidati, cuiuſmodi ea ſcientia ſit, cui ſe conſecraturi ſunt; & planum fiat aduerſus eos, qui, quę ignorant, contemnunt, quantæ dignitatis ſint hæ diſciplinæ, quas omnium ætatum ſapientiſſimi viri incredibili ſtudio ſibi putauerint comparandas. Vſus porro mihi fuit, in hac relatione concinnanda Petri Rami diligentiâ, qui ſcholarũ toto primo libro benè magno Mathematicam Hiſtoriã ex Proclo, Laertio, Vitruuio, Gellio, Polybio, Tzetze, aliiſque accuratè copioſéque conſcripſit.

Prima hominum ſcientia Matheſis fuit, ſi Ioſepho credimus. Is lib. 1 cap. 3. ſcribit Sethi nepotes Cælorum ordinem ac ſiderum curſus obſeruaſſe. Ne autem hæc inuenta ex hominum notitia dilaberentur, cum Adamus vniuerſalem mundi interitum fore prædixiſſet, vnum diluuio, incendio alterum, excitarunt duas columnas, alteram lateritiam, alteram lapideam: & vtrique ſua inuenta inſcripſerunt, vt ſi lateritiã diluuio

deleri

deleri contingeret, lapidea ſuperſtes, hominibus diſcendi copiam faceret, & quæ inſcripta continebat, ſpectanda exhiberet. Aiunt enim lapideam illam ab ipſis dedicatam: quæ & noſtris temporibus extaret in Syria. Hæc ille, penes quem fides eſto.

Poſt diluuium primos mortalium Aſſyrios & Chaldæos Mathemata coluiſſe tradunt idem Ioſephus, Plinius, Diodorus, Cicero. Sed ortæ & florentes apud Chaldæos Mathematicæ artes, deinde ex Chaldæa & Aſſyria ad Ægyptios tranſlatæ ſunt Auctore Abrahamo. Is enim cum Deo iubente ex patrio ſolo in Palæſtinam, ac deinde in Ægyptum profectus eſſet, cerneretq; Ægyptios artium bonarum capi ſtudio, atque indole ad diſcẽdum egregiâ eſſe, vt apud eundem Ioſephum eſt lib. 1. cap. 9. Arithmeticam illis Aſtronomiamque quam præcedere Geometriam neceſſe fuit, communicauit. Quibus deinde ſtudijs adeò Ægyptij floruere; vt Ariſtoteles 1. Metaph. cap. 1. affirmet Mathematicas artes primum in Ægypto à ſacerdotibus publicâ vacatione fretis inuentas eſſe.

Exinde Matheſis ex Ægypto mare traijciens, ad Græciæ Philoſophos peruenit: Thales enim Mileſius, qui ante Chriſtum floruit annis 584. primus Græcorum cum in Ægyptum veniſſet, Geometriam inde in

Græciam

Græciam tranſtulit. Is ſanè, præter alia, primi libri propoſitiones, 5, 15, 26 inuenit. Eidem debentur 2, 3, 4, 5, l. 4. cuius inuenti lætitiâ elatus bouem immolaſſe dicitur. Idē Æquinoctia & ſolſtitia obſeruare cœpit Laertio teſte; & ſolis eclipſim, vt ſcribunt Hippias & Ariſtoteles, primus prædixit; & Tzetzes Auctor etiam eclipſim lunæ Regi Cyro prænunciaſſe. Quapropter hic primus in Græcia Mathematicæ ſcientiæ parens atque Auctor fuit.

Poſt hunc Pythagoras Samius: ille philoſophorum antiquiſſimus, Mathematicas diſciplinas vehemēter auxit ornauitque. Et Arithmeticam quidem ita coluit, vt omnis propè illi ratio philoſophandi ex numeris duceretur. Geometriam verò, vt refert Laertius à materia abſtraxit primus; in qua mentis elatione inuenit 32, 44, 47, 48, lib. 1. Sed inprimis ob inuentas 32 & 47 lib. 1. celebratur, & huius quidem inuentionis lætitiâ tantâ affectus eſt, vt teſte Apollodoro apud Laertium, hecatombem immolarit. Idem incommenſurabiles magnitudines, & regularia quinque corpora primus aperuit. Idem Aſtrologiam & Muſicam impensè & docuit & exercuit. Neque ſolùm acutè & ſubtiliter multa inuenit, ſed etiam, ludū primus aperuit, in quo iuuentus tam honeſtas, tamque nobiles artes addiſceret.

Pytha-

Pythagoram Anaxagoras Clazomenius & Oenopides Chius ſecuti ſunt, quorum meminit Plato in amatoribus, vbi adoleſcentes de Anaxagora & Oenopide in circulorum deſcriptionibus concertantes inducit. Ab Anaxagora Geometriam quandã ſcriptam indicat Ariſtoteles, & ex Laertio accepimus oſtenſum ab eo ſolem Pelopõneſo maiorem (nota Aſtronomiæ incunabula,) eundemq; de habitationibus in lunâ nonnulla diſputaſſe. Oenopidi adſcribit Proclus 12 & 23, l. 1. Hos excepêre Briſo, Antipho, & Chius Hippocrates, omnes tentatâ circuli quadraturâ, ab Ariſtotele reprehenſi pariter & celebrati. Sed hos inter longè clariſſimus Hippocrates fuit, ille è mercatore Philoſophus & Geometra, qui præter circuli quadraturam, etiam cubi duplicationem primus tentauit per duas medias proportionales, quam viam, vt ſingularem & vnicam omnis poſteritas amplexa eſt. Illius etiam illa propria & magna laus eſt, quod Proclo teſte, elementa primus ſcripſerit, & ab alijs inuenta ordinauerit.

Democritus non in Philoſophia ſolum, ſed etiam in Matheſi admirabilis fuit, eius tum phyſica, tum fortè etiam Mathematica monumenta perierunt inuidiâ, (vt quidam ferunt) Ariſtotelis, ſua vnius ſcripta cupientis legi. Democriti Philoſophiam, Petrus

Gaſſen-

Gaſſendus eruditiſſimo opere nuper edito inſtaurauit. Theodorus Cyreneus, licet eius inuenta Mathematica non extent, vel eo nomine magnus eſt, quod Platonis Magiſter fuiſſe memoretur.

Ad Platonem igitur aliquando peruenimus, quo nemo alius ſplendorem maiorem attulit Mathematicis diſciplinis. Ille Geometriã maximis acceſſionibus amplificauit, ſtudio incredibili in eam collocato. Et inprimis reperta eſt ab eo Analyſis, certiſſima inueniendi & ratiocinandi via. Philoſophiæ ſuæ libros Mathematicis rationibus diſtinxit, ac quidquid in Mathematicis admirabile coniunctum cum Philoſophia eſſet, excitauit. Academiæ foribus inſcriptum legebatur: ὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω; nullus Geometriæ expers accedito: illuſtri ſanè argumento quàm non aliena ſed propria, quamque non inutilis, vel indecora, ſed honeſta & commoda Matheſis, ſanæ certæque Philoſophiæ ſit. Quantus certè Plato Matheſeos fuerit & admirator & cultor, is demum intelliget, qui eius monimenta perlegerit.

Ex Platonis Academia propè innumeri deinceps Mathematici prodierunt. Tredecim Platonis familiares à Proclo commemorantur, quorum ſtudijs Mathematica ſit abſoluta. Hinc Leodamas Thaſius, Archy-

tas

tas Tarentinus, Theætetus Athenienſis; à quibus Mathemata egregiè ſunt amplificata. Leodamas Analyſim à Platone acceptam exercuit, eiuſq; ope inueniſſe multa à Laertio dicitur. Theætetum tum inuenta ſua, inter quæ Elementa ab eo ſcripta & regularium corporum inſcriptio celebrantur, illuſtrem faciunt, tum Platonis encomia, qui etiam illius nomini dialogum inſcripſit. Archytas Elementa ſcripſit etiã ipſe, eiuſq; duplicatio cubi apud Eutocium legitur, cuius etiam illa ſingularis fuit laus, quod Mathematicam ad humanos vſus traduxerit ferè primus; vnde & lignea columba ab eo facta volaſſe legitur apud Gellium. Quem ſecuti Dædalus, aliiq; artifices fabulis poëtarum materiam præbuere. Archytas porro & Mathematicus fuit, & exercitus Imperator, qui nimirum in patriis bellis copiis ciuium ſuorum quinquies præfuit & quinquies vicit. Neoclidis tantum nomen celebratur, Leonte fortaſſis diſcipulo illuſtrior quam inuentis ſuis. Leon ſanè Mathematicæ vniuerſæ elementa conſcripſit, auxit, & ad vſum aptiora fecit. Quare inter præcipuos elementorum conditores ſuo merito cenſeri debet.

Eudoxus Gnidius ſuperiorum æqualis in Arithmeticis magnus &(ſi Scholiaſtæ Græco credimus) totum ei Quintum librum debemus.

hemus, Elementa item conſcripſit, & generaliora effecit, & ſectiones à Platone inchoatas auxit; inſuper aſtronomicarum hypotheſiū primus fabricator extitit, & Geometriæ fontes, vt ſupra Archytas, ad organicam ac mechanicam deriuauit. Amyclas Heracleotes & Menechmus, eiuſque frater Dinoſtratus, Helicon Cyzicenus, Theudius, Hermotimus Colophonius, Philippus Mendæus, omnes Platonici, Geometriam multò perfectiorem reddiderunt. Et Menechmus quidem ſectiones conicas inuenit, ac harum ope duas medias, cuius inuentio ab Eutocio reliquis præfertur. Theudius & Hermotimus elementa fecerunt vniuerſaliora & auctiora. Atque hi omnes ex Platonis Academia, Mathematicam Philoſophiam ad perfectionem adduxerunt, ait Proclus. Sed & Xenocrates Platonis auditor, & Ariſtotelis magiſter, ipſeque Ariſtoteles cognitione Mathematum clari fuêre. Illius cum auditor quidam eſſe vellet Geometriæ imperitus, abi, inquit, anſas enim Philoſophiæ non habes.

De *Ariſtotele* verò quid dicam, libri illius omnes locis Mathematicis ſunt referti, ex quibus in vnum collectis librum confecit Blancanus. Ex Ariſtotelis ſchola duo præcipuè celebrantur Eudemus & Theophraſtus. Hic ſcripſit de numeris libros duos, de

Geometriæ quatuor, de lineis indiuiduis vnum: ille hiſtoriam Mathematicam condidit, ex quo Proclus aliique ſua mutuati ſunt. Ariſtæo, Iſidoro, Hypſicli Geometris ſubtiliſſimis ſolidorum libros maximè debemus. Denique Euclides aliorum inuenta collegit, ordinauit, auxit, demonſtrauitque accuratius, eaque nobis reliquit elementa, quibus iam vbique terrarum ad Mathematicam iuuentus inſtituitur. Obijt anno ante Chriſtum 284 Euclidem ſecuti ſunt centum ferè poſt annis Eratoſthenes & Archimedes. Eratoſthenis clarum inprimis nomen fuit, ſed eius ſcripta periêre. Archimedis habemus multa, multa amiſimus.

Sed Archimedem cum nomino, apicem quendam humanæ ſubtilitatis, totiúſque Mathematicæ diſciplinæ abſolutionem animo concipio. Eius inuenta admiranda prodidêre Polybius, Plutarchus, Tzetzes, alijque. Archimedi coæuus fuit Conon Geometra & Aſtronomus, cuius mortem Archimedes deflet in lib. de quad. parab. Archimedem & Cononem interuallo non magno ſequitur Apollonius Pergeus, alter Geometriæ princeps, qui egregiæ laudis encomio magnus Geometra fuit appellatus. Illius extant quatuor Conicorum ſubtiliſſimi libri. Eidem adſcribuntur Euclidis

libri

libri 14 & 15, ab Hypſicle contracti Hipparchus & Menelaus, de ſubtenſis in circulo, hic 6, ille 12 libros primi conſcripsêre, pro quo inuento tam vtili & neceſſario non parua vtriſq; laus & gratia debetur. Extant etiam Menelai de triangulis ſphæricis libri tres. Theodoſij tripolitæ vtiliſſimi ſphæricorum libri tres in omnium manibus verſantur. Atque hi quidem, ſi Menelaum excipias, ante Chriſtum vixêre omnes.

Anno poſt Chriſtum 70 venit in lucem Claudius Ptolomæus, aſtronomorum princeps, vir planè mirabilis, ſupraque (inquit Plinius) naturam mortalium. Is verò non Aſtronomiæ tantùm, ſed etiam Geometriæ peritiſſimus fuit; quod teſtantur, tum alia multa ab eo ſcripta, tum in primis libri de ſubtenſis, Menelai quidem 6, Hipparchi verò 12, ab illo ad 5 theoremata contracti. Plutarchi etiam nominatiſſimi Philoſophi extant Mathematica problemata. Iã Eutocij Aſcalonitæ erudita in Archimedem commentaria quis ignorat? Ab eo Philonis, Dioclis, Nicomedis, Spori, Heronis, tanquã excellentium in Mathematicis Magiſtrorum inuenta de duplicando cubo recenſentur. Et Heronis quidẽ tam in mechanicis, quam in Geometricis excellens ingenium fuit. Cubi certè duplicatio ab eo tradita, à Pappo l. 3. p. 7. laudatur præ omnibus. Cteſibij A-

lexandrini,cui antlias debemus noſtras,admiranda opera à Vitruuio, Proclo, Plinio, Athenæo celebrantur. Gemini quoq; non minimum inter Mathematicos nomen eſt, quem Euclidi ipſi Proclus in quibuſdam præpoſuit.

Diophantus, & ipſe Alexandrinus, in Arithmetica tantus fuit, quantus in Geometria Archimedes, Apollonius, Euclides, verè totius numericæ ſubtilitatis magiſter; à quo reperta ſit admirabilis illa ars, quã Algebram dicimus; quæ hiſce temporibus à Franciſco Vieta, & Renato Carteſio multò perfectior & vniuerſalior effecta eſt. Reliqui inter veteres celebrantur Nicomachus Arithmeticis, Geometricis, Muſicis clarus monimentis, Serenus binis de cylindri ſectione libris Geometris notiſſimus, Proclus, Pappus, Theon. Quantus Mathematicus fuerit Proclus ex doctiſſimis eius in Euclidem commentarijs, alijſque ſcriptis manifeſtum eſt. Atque hic opinor ille eſt, qui, vt refert Zonaras, & ex eo Ramus, ac Baronius, ſub annum Chriſti 514, Vitaliani claſſem Conſtantinopolim obſidentis, optico ſpeculorum artificio combuſſit. Theonis laudes verè magnas mirabiliter exaggerat Petrus Ramus, vt etiam libros, quos Euclidi hactenus adſcripsère omnes, Theoni putet attribuendos. Sed iniquior vbique in

Eucli-

Euclidem Ramus, neque vllo ſolido nixus fundamento, hic audiendus non erit, vt ſinis aliquando ſit, agmen Pappus claudat tempore inter veteres poſtremus, vt qui vixerit circa annum 400, ſed nominis claritudine, omnique laude Mathematum primis adnumerandus. Quæ ante Hypſiclem, Cteſibium, & Diophantum protulerat fœcunda ingeniorum parens Alexandria, hunc quoque ingenii bono Matheſeos dedit. Scripſit collectionum Mathematicarum libros ſeptem, è quibus duo primi perierunt. Reliqui quinque tam multis abundant, tamque varijs, ex omni propè genere Mathematum nobiliſſimis inuentis, vt inter prima quæ extant veterum monimenta, ab omnibus cenſeantur.

Habetis originis ac progreſſionis Mathematicæ hiſtoriam breuem. Ex qua Matheſeos antiquitas, præſtantia, ac dignitas apparet. Sanè Reip. litterariæ principes, ijdem qui Philoſophiam, etiam Mathematicam genuêre, gemellas ſorores partu velut vno, quas qui diſtrahere ab inuicem violentè velit, næ ille in natiuam illarum concordiam, cum inſigni iniuria crudelis ſit; quando, quod fieri in gemellis ſolet, vno vel loco vel morte ſublato, languere, quin & contabeſcere alterum neceſſe ſit.

APPRO-

APPROBATIO CENSORIS.

Elementa Geometriæ R. P. Andreæ Tacquet Societ. IESV, *ad inſtructionem illorum, qui ſcientiam illam ſectantur, vtiliter imprimentur. Actum* 9. *Aprilis* 1654.

GVILLIELMVS BOLOGNINO
S.Th.L.Canon. & Lib.
Cenſor Antu.

FACVLTAS

R. P. PROVINCIALIS.

Ego infraſcriptus Societatis IESV per Flandro-Belgicam Præpoſitus Provincialis, poteſtate mihi factâ ab admodum R. P. N. Goſwino Nickel Præpoſito Generali eiuſdem Societatis, facultatem concedo, ut Elementa Geometriæ planæ ac ſolidæ, demonſtrata breui ac facili methodo, & tyronum captui magis accommodatâ; vnà cum ſelectis ex Archimede Theorematis, aliiſque nouis demonſtrationibus, Auctore P. ANDREA TACQVET: omnia ab aliquot Societatis noſtræ Mathematicis approbata, typis mandentur: in quorum fidem has manu noſtra ſubſcriptas, & ſolito officij ſigillo munitas dedimus. Antuerpiæ 18. Martij 1654.

IOANNES BAPTISTA
ENGELGRAVE.

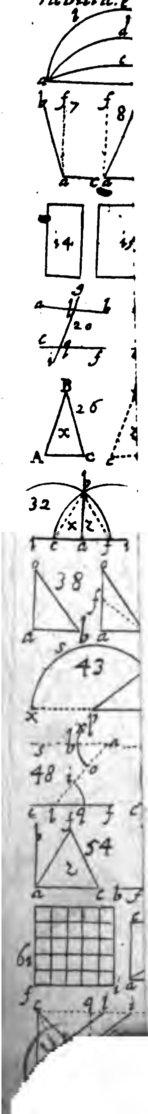
SVMMA PRIVILEGII.

PHILIPPVS Dei gratiâ, Hiſpaniarum, Indiarum, &c. Rex Catholicus, Archidux Auſtriæ, Dux Burgundiæ, Brabantiæ, &c. Sereniſſimus Belgarum Princeps, diplomate ſuo ſanxit, ne quis librum, cui titulus eſt R. P. ANDREÆ TACQVET Elementa Geometriæ citra IACOBI MEVRSII voluntatem, vllo modo imprimat, aut alibi terrarum impreſſum, in Inferioris Germaniæ ditiones importet, venalémve habeat. Qui ſecùs faxit, confiſcatione librorum & aliâ graui pœnâ mulctabitur, vti latiùs patet in Litteris datis Bruxellæ XXIX. Octob. M. DC. LXIV.

Signat

LOYENS.

Tabula.



ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

LIBER PRIMVS.

SCientiæ proprium munus eſt, ex notionibus quibuſdam ſimpliciſſimis, rationali naturæ à conditore Deo impreſſis, elicere aliquid, quod priùs ignorabatur, atque inde rurſum aliud ex alio; vt prior cognitio ſemper ad vlteriorem ſit gradus. Quæ ratio ſi accuratè teneatur, ex minimis, & per ſe notis ad rerum abditiſſimarum cognitionem pertingemus. Hanc methodum, rationemq́ue ſcientiæ, præ omnibus amplexæ ſunt eæ diſciplinæ, quæ in quantitatis contemplatione verſantur. Quo fructu id factum ſit, ſciunt omnes, qui hiſce ſtudijs imbuti ſunt. Et ſanè Geometria (vt de alijs Matheſeos partibus iam nihil dicam) mirum eſt, quam breui ex apertiſſimis ad obſcuriſſima trahat, & ex humillimis ad altiſſima ſtatim aſſurgat. Statuuntur primò ſimpliciſſima quædam facillimaq́; principia, quibus nemo ratione præditus diſſentire poſſit. Deinde nihil aſſeritur, vel admittitur, quod ex ijs infallibili ratiocinio nō ſit de-

ductum. Atque ita demum admiranda theoremata, ab omni humano ſenſu & cognitione remota, incredibili certitudine ac euidentiâ innoteſcunt.

Principiorum genera ex quibus Geometria omnis deriuatur, ſunt tria, Definitiones, Poſtulata, Axiomata.

DEFINITIONES.

1. PVnctum eſt ſignum in magnitudine indiuiduum.

Hoc eſt, quod diuidi ne cogitatione quidem poſſit. Punctum omnis magnitudinis quaſi principium eſt, ſicut vnitas numeri.

2. Linea eſt magnitudo tantùm longa.

Nimirum carens omni latitudine. Intelligitur generari ex fluxu puncti.

3. Lineæ termini ſunt puncta.

Fig 1. tabulâ 1. 4. Recta linea eſt, quæ ex æquo ſuis terminis interijcitur.

Vel vt Archimedes: Recta linea eſt minima linearum eoſdem terminos habentium; ſiue eſt omnium breuiſſima, quæ inter duo puncta duci poſſunt.

Vel vt Plato: Recta linea eſt, cuius extrema obumbrant omnia media.

Vnus omnium ſenſus eſt: Inſtrumentum quo rectæ lineæ deſcribuntur, regula eſt: quæ vtrum recta ſit, hoc examine licebit cognoſcere.

Iuxta regulam deſcribatur linea, tum regulam

inuerſam,

inuerſam, ſic vt extremitas prius dextra, iam ſit ſiniſtra, rurſum applica lineæ prius deſcriptæ, ſi planè cum illa congruat, recta eſt regula; ſi non congruat, non erit recta. Ratio pendet ex axiomate 13.

5. Superficies eſt magnitudo tantùm longa & lata.

Duas ergo habet dimenſiones. Intelligitur generari ex fluxu lineæ.

6. Superficiei extrema ſunt lineæ.

7. Planum, ſiue ſuperficies plana eſt, quæ ex æquo inter ſuas extremas lineas iacet.

Vel vt Hero: ſuperficies plana eſt, cuius omnibus partibus recta linea accommodari poteſt.

Generatur enim ſuperficies plana ex fluxu lineæ rectæ.

Vel: plana ſuperficies eſt, cuius extrema obumbrant omnia media.

Vel: plana ſuperficies eſt minima omnium eoſdem terminos habentium. *Idem ſenſus eſt omnium.*

Non definiuit hic corpus ſiue ſolidum Euclides, quia nondum hic erat acturus de corpore. Ne quis tamen illius definitionem deſideret; corpus eſt magnitudo longa, lata, & profunda. Tres igitur dimenſiones habet corpus, ſuperficies duas, linea vnam, punctum nullam.

8. Angulus planus eſt duarum linearum,

in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Fig. 2. 4. *Angulum igitur efficiunt duæ lineæ B A, C A ſe mutuo tangentes in A, ſic vt non exiſtant ſibi mutuo in directum; hoc eſt, non efficiant vnam lineam.*

9. Latera ſeu crura anguli, ſunt lineæ, quæ angulum efficiunt.

10. Vertex anguli eſt punctum (A) in quo crura ſibi mutuo occurrunt.

Fig. 2. 4. *Cum angulus eſt vnicus, vnâ litterâ ad verticem poſitâ deſignatur. Cum plures ad vnum punctum exiſtunt, deſignantur tribus litteris, quarum media denotat verticem anguli; vel etiam ſubinde vnicâ lateribus propè verticem interpoſitâ. Sic in figura 5. angulus qui fit à lineis B A, C A deſignatur vel litteris tribus B A C, vel vnicâ O.*

Fig. 5.

Fig. 2. 3. 11. Anguli æquales, vel potiùs ſimiles dicuntur; ſi, cum ſibi inuicem vertices imponuntur, latera vnius congruant lateribus alterius. *Ad hoc non requiritur, vt latera ſint æquè longa.*

12. Inæquales, ſeu diſſimiles dicuntur anguli, cum vertice & vno latere congruentibus, alterum non congruit: & ille maior dicitur, cuius latus cadit extra. *Sic angulus*

Fig. 5. *B A E maior eſt angulo B A C.*

Angulus non minuitur vel augetur, ſi crura minuas vel augeas.

Porro

Porro quia anguli natura in linearum incli-natione conſiſtit, inclinatio autem linearũ quan-titas non eſt, neq; angulus vllus quantitas erit. Et ſanè eodem iure curuitas eſſet quantitas, quo an-gulus, cum ab inuicem non magis differant, quam inflexio & infractio. Quando igitur cum Euclide, aliſq; geometris angulos æquales eſſe dicemus, ni-hil aliud, quam inclinationum ſimilitudo, hoc eſt, laterum congruentia indicabitur. Vide quæ de hac re plenius dicturi ſumus poſt propoſitionẽ 16. l. 3.

13. Angulus rectilineus eſt, quem rectæ lineæ efficiunt; curuilineus, quem curuæ; mixtus, quem recta & curua. *Fig. 2. 4.*

14. Cum recta (C A) ſuper rectam (B F) conſiſtens, in neutram inclinat partem, ac proinde angulos vtrimque facit æquales (C A B) & (C A F,) rectus eſt vterque æqualium angulorum: Recta autem (C A) alteri inſiſtens dicitur perpendicularis, ſeu perpendiculum. *Fig. 6.*

Angulus rectus ſic etiam definiri poteſt. *Fig. 6.*

Rectus angulus is eſt (B A C) cui a par-te altera æqualis oritur (C A F,) ſi vnum latus (B A) produxeris.

Duæ regulæ ſic compactæ vt angulum rectum contineant, inſtrumentum efficiunt, quod norma appellatur. Illius inuentorẽ Vitruuius c. 2. l. 9. af-firmat Pythagorã. Tanta vero anguli recti vis eſt in rebus omnibus cõſtruendis, dimetiẽdis formãdis & firmãdis, ut nihil ferè effici ſine illo poſſit. Nor-

mæ Examen ſic inſtituitur. Eius latus A E appli-ca rectæ lineæ A F, & iuxta latus alterum deſcri-batur recta C A. Conuerſa deinde norma verſus B, ſi vtroque ſuo latere congruat rectis C A, A B; ſcito eſſe legitimam & exactam. Ratio patet ex ipſa def. 14.

Fig. 7. 15. Obtuſus angulus eſt (B A C,) qui recto (F A C) maior eſt.

Fig. 8. 16. Acutus angulus eſt (L A I) qui recto (F A I) minor eſt.

17. Figura plana, eſt ſuperficies plana, vnâ vel pluribus lineis vndiq; terminata.

Fig. 9. 18. Circulus eſt plana ſuperficies, vnius lineæ circuitu comprehenſa, quæ circumferentia dicitur, à qua ad aliquod punctum intra contentum (A) omnes, quæ duci poſſunt rectæ lineæ, ſunt æquales.

19. Hoc vero punctum centrum appellatur.

Fig. 9. 20. Diameter circuli eſt recta per centrum ducta, (B C,) ad circumferentiam vtrimque terminata, & circulum bifariam diuidens.

Fig. 9. 21. Semidiameter, ſiue radius eſt recta (A F,) ex centro ad circumferentiam ducta.

Fig. 9. 22. Semicirculus eſt figura (B L C) comprehenſa à diametro (B C) & dimidia circumferentia (B L C.)

Fig. 9. *Circulus ita generatur: ſi recta linea (A B) vno extremo ſuo (A) manente fixo, in orbē circumagatur,*

tur, recta ipſa circulum, extremitas illius altera (B) circumferentiam producet. Porro mira circuli indoles vel in ipſo exortu ſuo apparet. Ad eius nãq; geneſim contraria concurrunt, motus & quies, dũ linea mouetur, & eius extremum quieſcit. Dein lineæ generantis puncta omnia, cum inæquales eodem tempore periodos abſoluant, diuerſa celeritate mouentur.

Tertio peripheria circulum ambiens, conſtat quodammodo ex contrarijs, & extremis ſine medio; ex concauo nimirum & conuexo, inter quæ rectum ita medium eſt, vt æquale inter magnum & paruum; idq; eo mirabilius eſt, quod ea contraria inſint lineæ nullam latitudinẽ habenti. Hæc tria Ariſtoteli viſa ſunt admiranda, ex quo illa deprompſimus. At prodigia circuli longè maiora aperuimus in diſſertatione phyſico-Mathematica, quàm vna cum Cylindricis & annularibus in lucem emiſimus anno 1652 iſthic ea leget, qui volet.

Circumferentiam Mathematici partiri ſolent in 360. æquales partes (quas gradus vocant) ob multas illius numeri commoditates; ſemicircumferentiam in 180. quadrantem in 90.

23. Rectilinea figura, eſt ſuperficies plana, rectis lineis vndique terminata.

24. Triangulum, ſiue trilaterum, eſt plana ſuperficies tribus rectis comprehenſa.

Hæc figurarum rectilinearum prima ac ſimpliciſſima eſt, in quam ceteræ omnes reſoluuntur.

25. Triangulum æquilaterum, eſt quod Fig. 10.

tria latera habet æqualia.

Fig.11.12. 26. Triangulum Iſoſceles,ſeu æquicrure, quod duo tantùm latera habet æqualia.

Fig.13. 27. Scalenum, quod tria latera inæqualia habet.

Fig.13. 28. Rectangulum triangulum eſt, quod vnum angulum habet rectum.

Fig.12. 29. Obtuſangulum triangulum eſt,quod vnum angulum habet obtuſum.

Fig.10.11. 30. Acutangulum triangulum eſt,quod tres habet acutos angulos.

Fig.14.15. 31. Inter figuras quadrilateras,rectangulũ eſt, quod quatuor angulos habet rectos, adeoq; ęquales: *ſiue latera æqualia ſint, ſiue nõ.*

Fig.15. 32. Quadratum eſt, quod æquilaterum, & rectangulum eſt,*ac proinde æquiangulum.*

Omne quadratum eſt rectangulum, ſed non contra.

Fig.16. 33. Rhombus eſt, qui æquilaterus, ſed non æquiangulus eſt.

Fig.17. 34. Rhomboides, quæ aduerſa latera & angulos habens æqualia,neque æquilatera, neque æquiangula eſt.

Fig.14.15.16.17. 35. Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cuius bina oppoſita latera (A B, F C,& B F, A C)ſunt parallela. Quid vero ſint parallelæ, dicetur ſeq. defin.

Omne rectangulum, & quadratum eſt parallelogrammum; vt ſuo loco demonſtrabitur. Sed non contra.

36. Rectæ lineæ parallelæ ſeu æquidi-ſtantes ſunt, quæ in eodem plano exiſtentes, vtrimq; in infinitum protractæ, æqualibus ſemper interuallis inter ſe diſtant. Fig. 18.

Æqualia interualla deſumuntur penes perpendiculares. Quare ſi omnes ad vnam ex duabus, parallelam A B, perpendiculares Q L æquales fuerint, dicentur rectæ A B, C F parallelæ.

Generantur parallelæ, ſi recta L Q ad rectam A B perpendicularis, per A B ſemper perpendiculariter moueatur, tunc enim eius extremum L deſcribit parallelam C F.

Euclides definit parallelas eſſe, quæ vtrimque in infinitum productæ, in neutram partem coincidunt. Verum quia dantur lineæ quæ ſimul in infinitum productæ, licet ad ſe mutuo appropinquẽt ad interuallum quouis dato minus, ac proinde, licet non ſint parallelæ, nunquam tamen concurrant, (cuiuſmodi ſunt hyperbola & recta linea; conchois & linea recta; item duæ æquales parabolæ circa eundẽ axem deſcriptæ, & plures aliæ;) Non videtur per ſe notum eſſe, duas rectas licet nunquã concurrant, fore ſemper æquali interuallo diſſitas, hoc eſt æquidiſtantes: poſſet enim quiſpiam obijcere, fieri fortaſſis poſſe, vt etiam ipſæ, licet ad ſe mutuo ſemper appropinquarent, tamen nunquã concurrerent. Quare Euclidæa definitio paralleliſmi naturam non ſatis explicat.

37. Parallelogrammi & cuiuſuis quadrilateri diameter eſt recta (A F) per angu- Fig. 17.

los

los oppoſitos ducta.

38. Figuræ planæ pluribus lateribus, quam quatuor comprehenſæ, multilateræ, ſeu multangulæ, ſeu græca voce, polygonæ vocantur.

Fig. 19. 39. Rectilineæ figuræ externus angulus eſt, qui latere producto extra figuram oritur. *Tales ſunt FBC, GCA, HAB. Tot igitur figura qualibet habet externos angulos, quot latera & angulos internos.*

Poſtulata.

POſtulatum eſt, quod facilè fieri poſſe, per ſe ſit manifeſtum. Poſtuletur ergo, vt concedatur.

1. A quouis puncto ad quoduis punctum rectam lineam ducere.

2. Rectam lineam terminatam in directum & continuum protendere.

3. Quouis centro ad quoduis interuallum circulum deſcribere.

Axiomata.

AXioma eſt ſententia per ſe manifeſta.

1. Quæ eidem ſunt æqualia, & inter ſe æqualia ſunt. Et quod vno æqualium maius aut minus eſt, maius quoque aut minus eſt altero æqualium; & conuerſim.

2. Si

2. Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

3. Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanebunt, erunt æqualia.

4. Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5. Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt inæqualia.

6. Quæ eiuſdem dimidia ſunt, inter ſe ſunt æqualia: & quæ eiuſdem ſunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter ſe æqualia ſunt.

7. Quæ mutuo ſibi congruunt, æqualia ſunt.

Non rectè Clauius hoc Axioma conuertit. Falſum eſt enim, ea quæ vniuerſim inter ſe æqualia ſunt, ſibi mutuo congruere: Diſsimiles enim magnitudines poſſunt eſſe æquales, neque tamen congruent. Quòd ſi ſimiles & æquales fuerint, valebit conuerſa. Statuamus igitur axioma.

8. Si rectæ lineæ æquales fuerint, ſibi mutuo congruent: & anguli ſi æquales fuerint, ſibi mutuo congruent.

9. Totum ſua parte maius eſt.

10. Omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt.

Euclidis axioma undecimum eſt: Si in duas rectas A B, C F, incidens recta G I, angulos ad eandem partem interiores B L Q, F Q L, fecerit duobus rectis minores, duæ illæ rectæ Fig. 26.

quæ ſi protrahantur, tandem concurrent ad illam partem, ad quam ſpectant anguli duobus rectis minores.

Hoc vero non eſt clarius illo, quod Prop. decimum 29. Euclides ipſe demonſtrat: videlicet: ſi anguli B L Q, F Q L, fuerint duobus rectis æquales, rectæ A B, C F, nunquam concurrent.

Quare axioma illud è principiorum numero cũ Gemino & Proclo, aliiſq; Geometris reiecimus: eſt enim non axioma, ſed theorema, idq; demonſtrabimus poſt Propoſitionem 31. huius libri.

Ex defin. 36. *Eius loco alia duo ſequentia ſubſtituo, quorum veritas ex definitione paralleliſmi ſtatim apparet. Eſto igitur axioma.*

11. Parallelæ lineæ communi perpendiculo vtuntur.

Hoc eſt, recta, quæ ad parallelarum vnam perpendicularis, eſt quoq; perpendicularis ad alteram.

Fig. 21. 12. Perpendicula bina (L O, Q I) ex parallelis æquales vtrimque intercipiunt partes (L I, O Q.)

13. Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

Ad hoc ſiquidem opus eſt ad minimum tribus.

14. Duæ rectæ lineæ nequeunt habere ſegmentum commune: & omnes rectæ punctualiter ſe interſecant.

Fig. 22. *Recta A X occurrat rectæ Z D, ea ſi producatur non perget per D A, ſed in E, ſic vt rectam X B non niſi punctualiter interſecet. Axioma ex*

notione

motione ipſa recta lineæ evidentiſſimum eſt. Tamen quia nonnulli tam ſubtiliter philoſophantur, ut credant rectas lineas, aliquâ ſui parte communiſceri poſſe, lubet in eorum gratiam hoc axioma amplius declarare.

Habeant, ſi fieri poteſt, duæ rectæ A X, A Z partem communem A D. Centro A deſcribatur circulus, ſecans rectas in B, & C, tum accipiatur arcus B F æqualis arcui B C, & intelligatur ducta eſſe recta F A.

Rectæ igitur C A & F A eundem prorſus ſitum habent reſpectu rectæ B A. Sed recta C A cum recta B A habere dicitur commune ſegmentum D A, ergo etiam recta F A habet cum B A commune ſegmentum D A.

Tres iam igitur rectæ C A, B A, F A commune D A ſegmentum habent.

Sumatur rurſum arcus F G æqualis prioribus B F, & C B; & intelligatur ducta eſſe recta G A. Rurſum liquet rectas B A, G A, eundem habere ſitum reſpectu rectæ F A. Sed iam oſtenſum eſt rectam B A habere cum recta F A commune ſegmentum D A. Ergo etiam recta G A, cum F A commune habet ſegmentum D A.

Iam ergo rectæ quatuor C A, B A, G A, F A commune D A ſegmentum habent. Eodem prorſus modo oſtendam ſi per totam circuli circumferentiam ſumantur arcus prioribus æquales, omnes ſimul circumquaque rectas lineas ductas ad A unum idemq; habituras commune ſegmentum D A. Hoc

tam

diametri circuli L C A. Ergo A C, B C
c Per axio.1. *c* ſunt æquales inter ſe: ac proinde omnia latera trianguli ſunt æqualia. Ergo triangu-
d Per def.25 lum *d* A C B & æquilaterum eſt, & ſuper datâ rectâ A B conſtitutum, quod erat faciendum.

PROPOSITIO II.

Fig.24. *AD datum punctum (A) datæ rectæ (E F) æqualem ponere.*

a Poſtul.3. Accipe circino *a* interuallũ E F, & transfer ex A in D, erit recta A D par datæ E F.

PROPOSITIO III.

Fig.24. *DAtis duabus rectis inæqualibus, de maiore (G H) minori (E F) parem auferre (G I.)*

b Poſtul.3. Accipe circino *b* interuallum minoris datæ E F, & transfer in maiorem ex G in I.

PROPOSITIO IV.

Fig.25. *SI duorum triangulorũ (X, Z) latus vnum (B A) vni (F L) & alterum (C A) alteri (I L) ſit æquale, anguli (A & L) ab illis lateribus facti, etiam ſint æquales; æquabuntur etiã & baſes*

ſes (B C, F I) & tota triãgula (X, Z) & reliqui ad baſim anguli (B, F & C, I) qui lateribus æqualibus opponuntur.

Nam ſi intelligamus triangulum Z triãgulo X ſuperponi, latera L F, L I perfectè congruent a ſibi æqualibus lateribus A B, A C, ſic vt puncta tria L, F, I, cadant ſuper tria puncta A, B, C, ergo tum etiam baſis F I tota cadet ſupra totam baſim B C: Sed & anguli F, B, itemq; I, C, totaq; triangula ſibi mutuo tunc congruent. Omnia igitur per 7. ax. æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum. a Per axio. 8.

Scholium.

Simili ferè ratiocinio, theorema ſequens, cuius mox erit vſus, licebit demonſtrare. Fig. 25.

Si duorum triangulorum X, Z, latera B C, F I æqualia fuerint, & anguli illis lateribus adiacentes, nimirum B & C ipſis F, & I fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipſa, æqualia erunt.

Quoniam enim anguli B & C æquantur angulis F, & I, ſi latus F I imponas lateri ſibi æquali B C, illi d congruet. Tum verò ob æqualitatem angulorum F, B, & I, C etiam e F L cadet ſupra B A, & I L ſupra C A. Ergo etiam punctum L, incidet in punctum A; (ſi enim caderet extra A, latera F L, I L, non inciderent in latera B A, C A.) Ergo omnia ſunt per axioma 7. æqualia. d Per axio. 8. e Per axio. 8.

PROPOSITIO V.

Fig. 26. *TRiãguli Iſoſcelis ſeu æquicruris ad baſim anguli (A, C) æquales ſunt.*

Intelligatur triangulum A B C bis poſitum, ſed ſitu conuerſo *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis A B C, *c b a*, ex hypotheſi æquale eſt latus A B, lateri *c b*, & latus C B lateri *a b*, & angulus B angulo *b*; etiam *b* ad baſim angulus A angulo *c* æqualis erit. Quod erat demonſtrandum, ijdem enim ſunt anguli C & *c*.

b Per 4. l. 1.

Corollarium.

ÆQuilaterum ergo triangulum, etiam æquiangulum eſt.

PROPOSITIO VI.

Fig. 26. *SI in triangulo (A B C) duo anguli (A & C) æquales fuerint, etiã latera (AB, C B) ijs oppoſita, æqualia erunt.*

Intelligatur triangulum A B C bis poſitum, ſed ſitu conuerſo *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis A B C, *c b a* æquatur latus vnum A C, vni lateri *c a*, & angulus A angulo, *c*, & angulus C angulo, *a*; etiam reliqua omnia *c* erunt æqualia, ac proinde

c Per Schol. prop. 4.

inde latus A B æquabitur lateri *c b*; quod erat demonſtrandum, eædem enim ſunt lineæ C B & *c b*.

Corollarium.

Æquiangulum ergò triangulum, etiam æquilaterum eſt.

PROPOSITIO VII.

Est propter 8, quæ ſine illa ſeorſim propoſita demonſtrabitur.

PROPOSITIO VIII.

SI duo triangula habuerint omnia latera ſibi mutuo æqualia (A C ipſi E F; C B ipſi F I; A B ipſi E I;) etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppoſitos habebunt æquales (C ipſi F; A ipſi E; B ipſi I.) Fig. 27.

Ponatur enim latus AB ſupra ſibi æquale E I. Tum verò punctum C vel incidet in punctum F vel non. Si incidat in F, tota triangula congruent, ac proinde omnes anguli *a* æquales erunt. a Per axio. 7

Si C, cadat extra F, ducatur F C. Quoniam per hypotheſim latera E F, A C æquantur, erit *b* angulus E F C par angulo E C F. ergo I F C maior erit, quam E C F. ergo I F C multo maior erit, quam I C F. Rurſum, quia per hypotheſim I F, B C, æ- Fig. 28. b Per 5. l. 1.

 quantur,

e Per 5.l.1. quantur, erit I F C e par I C F. Ergo I F C & multò maior eſt quam I C F, & æqualis, quod eſt impoſſibile. Ergo C non cadit extra F. Ergo &c.

Plures caſus, quos hoc theorema admittit, conſultò prætermiſi, ne tyrones fatigarem. Neque verò difficulter eorum demonſtratio ex demonſtratione iam poſita elicietur.

PROPOSITIO IX.

Fig. 29. *Datum angulum rectilineũ (I A L) biſariam ſecare.*

Ex lateribus anguli accipe circino æquales A B, A C; centris B ac C deſcribe duos æquales circulos ſe ſecantes in F, ducaturq; recta F A. Hæc angulum biſecabit.

Ducãtur enim B F, C F; triangula F A B, F A C ſunt ſibi mutuo æquilatera; nam latera A B, A C ex conſtitutione æqualia ſunt, & latera B F, C F, quia æqualium circulorum ſemidiametri, etiam æquantur; & A F vtriq; triangulo commune eſt. Ergo a Per 8.l.1. anguli B A F, C A F a æquales ſunt. Biſectus eſt ergo datus angulus I A L, quod erat faciendum.

Corollarium.

Hinc patet quomodo angulus ſecari poſſit in æquales angulos 4. 8. 16. &c. ſingulas nimirum partes iterum biſecando.

Scho-

Scholium.

MEthodum ſecandi angulos in æquales quotcunque, circino & regulâ hactenus nemo docuit.

Ex Pappo tamen & Archimede habemus curvas quaſdam lineas, quadratricem videlicet & ſpiralem, quarum adminiculo id obtinetur. Anguli triſectio perficitur à Pappo l.4.prop.31.præſidio hyperboles, quod etiam obtineri poteſt ope parabolæ, vel conchoidis.

Mechanice datum angulum in quotcunq; ſecabis æquales angulos, ſi ex anguli vertice A tanquam centro intra anguli crura arcum deſcribas, eumq; diuidas in quot placuerit æquas partes; rectæ enim ex A per diuiſionum puncta emiſſæ, angulum ſecabunt in partes totidem æquales. Fig. 30.

PROPOSITIO X.

DAtam rectam finitam (A B) ſecare bifariam. Fig. 31.

Super data A B fac triangulum æquilaterum *a* A G B. Angulum eius G *b* biſeca per rectam G C. Eadem biſecabit rectam A B datam. a Per 1.l.1. b Per præced.

Nam in triangulis X, Z, latus C G eſt commune, & per conſtructionem G B, G A æqualia, anguliq; ijs contenti A G C. B G C æquales. Ergo baſes A C, B C, *c* æquantur. c Per 4.l.1.

Fig. 36. 3. Omnes anguli circa vnum punctum conſtituti, conficiunt quatuor rectos. Patet ex Corol. 2. ſunt enim quatuor recti in plures partes ſecti.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 35. *SI duæ rectæ (XR, ZR) ad idem vtrimq; punctum rectæ QR faciãt angulos (XRQ, ZRQ) duobus rectis æquales; (XR, ZR) vnam rectam efficient.*

Si negas, faciant XR, BR vnam rectam. Ergo anguli XRQ, QRB *b* conficient duos rectos, quod *c* eſt abſurdum, cum ex hyp. XRQ, QRZ duos rectos efficiant.

b *Per* 13. *l*. 1
c *Contra axio*. 9.

PROPOSITIO XV.

Fig. 37. *SI duæ rectæ (BC, FL) ſe ſecuerint in (A.) erunt anguli ad verticem (A) oppoſiti, æquales.*

Nimirum LAB ipſi CAF, & BAF ipſi LAC. Nam quia BA inſiſtit rectæ LF, erunt LAB, FAB, *a* pares duobus rectis. Et quia FA inſiſtit rectæ BC, erunt *b* quoque FAC, FAB pares duobus rectis. Ergo *c* duo ſimul LAB, FAB æquãtur duobus ſimul CAF, FAB. Abla-

a *Per* 13. *l*. 1.
b *Per eand.*
c *Per axio*. 1.

to

Ducantur enim A C, A I. Quoniam per conſtructionem triangula X & Z ſunt mutuo æquilatera; erunt anguli *d* C B A, I B A d Per 8. l. 1.
æquales. Ergo A B perpendicularis *e* eſt. e Per def. 14
Ex dato igitur puncto &c. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XIII.

R*ECta (B A) ſuper rectam (C F)* Fig. 34.
conſiſtens aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales.

Nam ſi B A inſiſtat perpendiculariter, erunt per def. 14. anguli B A C, B A F, vtrimque recti. Si verò B A inſiſtat obliquè, excitetur *a* perpendicularis A L. Quia tum a Per 11. l. 1.
anguli inæquales C A B, F A B eundem locum occupant, quem duo recti C A L, L A F, ac proinde ijs congruunt, erunt *b* b Per axio. 7.
his illi æquales. Quod erat demonſtrandum.

Corollaria.

1. EOdem modo demonſtrabitur ſi plures rectæ, quàm vna, eidem rectæ inſiſtant, angulos effici duobus rectis æquales.

2. Duæ rectæ inuicem ſecantes B A C, Fig. 37.
F A L efficiunt angulos, quatuor rectis æquales. Patet ex propoſ.

 3. Om-

Fig. 36. 3. Omnes anguli circa vnum punctum conſtituti, conficiunt quatuor rectos. Patet ex Corol. 2. ſunt enim quatuor recti in plures partes ſecti.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 35. *SI duæ rectæ (XR, ZR) ad idem vtrimq; punctum rectæ QR faciãt angulos (XRQ, ZRQ) duobus rectis æquales; (XR, ZR) vnam rectam efficient.*

Si negas, faciant XR, BR vnam rectam. Ergo anguli XRQ, QRB *b* conficient duos rectos, quod *c* eſt abſurdum, cum ex hyp. XRQ, QRZ duos rectos efficiant.

b *Per 13. l. 1*
c *Contra axio. 9.*

PROPOSITIO XV.

Fig. 37. *SI duæ rectæ (BC, FL) ſe ſecuerint in (A,) erunt anguli ad verticem (A) oppoſiti, æquales.*

Nimirum LAB ipſi CAF, & BAF ipſi LAC. Nam quia BA inſiſtit rectæ LF, erunt LAB, FAB, *a* pares duobus rectis. Et quia FA inſiſtit rectæ BC, erunt *b* quoque FAC, FAB pares duobus rectis. Ergo *c* duo ſimul LAB, FAB æquãtur duobus ſimul CAF, FAB. Abla-

a *Per 13. l. 1.*
b *Per eand.*
c *Per axio. 1.*

to

to igitur communi F A B, remanent *d* æ-quales L A B, C A F. Eodem modo o-ſtendam æquales eſſe B A F, L A C, d Per axio 3

PROPOSITIO XVI. XVII.

Continentur in prop. 32. Neque ante illam adhibentur.

PROPOSITIO XVIII.

In omni triangulo angulus (A) maior eſt, qui maiori lateri (B O) opponitur: (B) minor, qui minori (A O.) Fig. 38.

Nequit A, eſſe par B, aliàs *a* latera B O, A O æquarentur contra hypotheſim. Nequit etiam A minor eſſe quam B. Nam ſi A minor eſt, B maior, poterit intra angulum B per rectam B F fieri angulus A B F æqualis A. Tum vero per 6. æquales erunt B F, A F, & ſi addas vtrique, O F, erunt B F, F O æquales A O. Sed A O per hyp. minor eſt quàm B O. Ergo etiam B F, F O minores ſunt quàm B O, quod repugnat definitioni lineæ rectæ, quæ eſt omnium breuiſſima. Angulus igitur A nec minor eſt angulo B, nec æqualis. Ergo maior; quòd erat demonſtrandum. a Per 6. I.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

Fig. 38. *IN triangulo latus (B O) maius eſt, quod opponitur maiori (A) angulo: (A O) minus, quod minori (B.)*

Eſt conuerſa prioris. B O non eſt minus quam A O, alias per 18. angulus A eſſet minor angulo B contra hyp. Neq; etiam B O æquale eſt A O, alias per 5. anguli A, B, æquarētur, rurſus contra hyp. Ergo B O maius eſt quā A O. Quod erat demonſtrandū.

PROPOSITIO XX.

OMnis trianguli duo quælibet latera reliquo ſunt maiora.

Eſt Archimedi inſtar axiomatis; immediatè ſiquidem patet ex definitione Archimedeâ lineæ rectæ, quam vide ſupra in definitionibus.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 39. *SI à terminis vnius lateris (A B) intra triangulū duæ rectæ iunguntur (A O, B O) hæ lateribus trianguli (A C, B C) minores ſunt, maiorem vero angulum (A O B) comprehendunt.*

1. Pars.

1. Pars. Produc A O in F. A C, C F ſunt a maiores, quam A F. Additâ ergo communi F B, erunt A C, C B maiores quam A F, F B. Rurſum O F, B F ſunt b maiores, quã O B, Additâ ergo communi A O, erunt A F, F B maiores, quam A O, O B. Ergo A C, C B ſunt multò maiores, quam A O, O B.

a Per 20. 1.

b Per eand.

2. Pars demonſtrabitur in Coroll. 2. partis primæ prop. 32. Eâ interim non vtemur.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 40.

EX datis tribus rectis (B O, L B, L O) quarum duæ quælibet reliquâ ſint maiores, triangulum conſtituere.

Aſſumatur datarum vna B L, atque vnâ eius extremitate B acceptâ pro cẽtro, interuallo alterius datæ B O deſcribatur arcus.

Deinde acceptâ pro centro extremitate alterâ L, interuallo tertiæ L O deſcribatur arcus priorem ſecans in O: ducanturque rectæ B O, L O. Dico factum.

Demonſtratio patet ex conſtructione.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 40.

AD datum in rectâ punctũ (B) angulum efficere æqualem dato (A.)

Ducatur vtcunq; C F ſecans latera da-

ti

ti anguli A. In data recta ex B accipe B L parem A F. Centro B interuallo A C deſcribe circulum: item alium centro L interuallo F C qui priorem ſecet in O. Ex O ad B & L duc rectas.

Erit angulus L B O par dato A.

Nam per conſtr. triangula ſibi mutuo ſunt æquilatera. Ergo per 8. anguli B & A æquales.

Scholium.

IN gratiam tyronum viſum eſt hic nonnulla ad praxim angulorum neceſſaria proponere.

Fig. 41. *Anguli menſura eſt circuli peripheria, quæ ex A vertice anguli tanquam centro deſcribitur, vt patebit ex prop. vltima l. 6.*

Itaque quot gradus continebit arcus B C inter anguli B A C crura interceptus, tot graduum dicetur eſſe angulus B A C. Et quoniam rectum angulum B A F metitur quadrans peripheriæ B F, gradus 90. continens, dicetur rectus angulus eſſe graduum 90. Similiter quia duos rectos menſurat dimidia circumferentia in 180. gradus ſecta, & quatuor rectos circumferentia tota ſecta in gradus 360. dicentur duo recti efficere gradus 180. & quatuor recti gradus 360. His prænotatis praxes angulorum ſunt.

Fig. 42. 1. *Ad datum in recta punctum B angulum ſtatuere parem dato A. Ex A dati anguli vertice tanquam centro inter latera arcum deſcribe C E.*

Centro

Centro B puncto dato, deſcribe eodem internallo arcum L Z: ex quo aufer L O parem C F. Per B & O duc rectam: erit L B O par dato A.

2. Dati anguli O P Q gradus examinare. Fit hoc facillimè per ſemicirculum corneum tranſparentem, in 180. gradus diuiſum, Centrũ ſemicirculi pone ſupra P verticem anguli, & ſemicirculi radium P L ſupra anguli latus P Q. Arcus L O inter anguli crura interceptus oſtendet, quot graduum ſit datus angulus. Fig. 42.

3. Angulum conſtruere datos cõtinentem gradus, vt 42. Duc rectam X Q, in qua ſigna punctum P. Super P pone ſemicirculi centrum eiuſq; ſemidiametrum P L ſupra P Q. Ab L numera gradus 42. vſque in O. per O ex P ducta recta dabit angulum O P L graduum 42.

Horum omnium demonſtratio pendet ex vltima prop. lib. 6.

PROPOSITIO XXIV. & XXV.

SI duo triangula (B A C, B A F) duo latera (B A, A C) duobus (B A, A F,) alterum alteri, æqualia habuerint; vnum vero triangulum angulum illis lateribus contentum (B A F) maiorem habeat altero (B A C;) habebit quoque baſim B F maiorem baſi (B C.) Fig. 44.

Et ſi baſim maiorem habuerit, habebit angulum maiorem.

Centro

Centro A deſcribe per C circulum 3. is tranſibit per F, quia A C, A F ponuntur æquales. Ergo B F cadit ſupra C. Iunge CF. Angulus B C F eſt maior angulo A C F; hoc eſt per 5. angulo AFC, hoc eſt multò maior angulo B F C. Ergo a BF oppoſita maiori angulo B C F maior eſt, quàm BC oppoſita minori B F C.

a Per 19. l. 1.

2. Pars patet ex prima parte & ex prop. 4.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 25.

SI duo triangula (X, Z) *duos angulos duobus æquales habuerint alterum alteri* (*B ipſi F & C ipſi I,*) *& vnũ latus vni lateri æquale, vel quod inter æquales angulos exiſtit* (*vt B C, F I*) *vel quod vni æqualium angulorum opponitur* (*vt AC, LI:*) *reliqua omnia erunt æqualia.*

Ponantur primò æqualia eſſe latera BC, FI, inter æquales angulos poſita: tum verò reliqua etiam omnia æqualia eſſe demonſtratum eſt in ſcholio prop. 4.

Ponantur deinde latera AC, LI æqualibus angulis B & F oppoſita, eſſe æqualia. Quia anguli B, C per hyp. æquantur angulis F, I; etiam reliqui A, L æquales erunt per corol. 8. p. 32. quę ab hac non depẽdet.

Ergo

Ergo per primam partem omnia reliqua ſunt æqualia.

PROPOSITIO XXVII.

Si duas rectas (A B, C F) parallelas ſecuerit recta G O: erunt 1. æquales alterni anguli (R L O, Q O L, item B L O, C O L) 2. externus (G L B) æqualis interno ad eandem partẽ (L O F) (item G L R ipſi L O C.) 3. Duo ad eandem partem interni ſimul (A L O, C O L) æquales duobus rectis: item duo B L O, F O L duobus rectis æquales. Fig. 45.

1. Pars. Ex O & L duc perpendiculares O R, L Q erunt [a] hæ ad vtramque parallelam A B, C F perpendiculares, & per def. 36. inter ſe æquales. Æquales quoque [b] ex parallelis auferent partes R L, Q O. Ergo triangula, X, Z, ſibi mutuo æquilatera ſunt. Ergo [c] anguli R L O, Q O L alterni æqualibus lateribus R O, Q L oppoſiti, ſũt æquales. Quod erat primum. Ex quo patet etiam alternos reliquos B L O, C O L æquales eſſe. Nam quia tam B L O, A L O, quàm C O L, F O L æquantur [d] duobus rectis; erunt B L O, A L O æquales ipſis C O L, F O L. Ablatis ergo æqualibus

Fig. 46.
a Per axio. 11.
b Per axio. 12.
c Per 8. Lib.
d Per 13. Lib.

R L O,

R L O,F O L,erunt reliqui B L O,COL etiam æquales.

e Per 15.l.1. 2. Pars. G L B æquatur ad verticem e oppoſito R L O. Sed R L O æquatur per 1.partem L O F. Ergo G L B externus æquatur interno L O F: quod erat alterum.

f Per 14.l.1. 3. Pars. A L O per 1. partem æquatur F O L. Atqui F O L cum C O L f facit duos rectos. Ergo etiã A L O cum C O L facit duos rectos. Quod erat tertium.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 47. *SI duas rectas (A B, C F) ſecans recta (G O) alternos angulos (A L O, F O L) æquales fecerit, erunt (A B, C F) parallelæ.*

Si negas, ſit ergo alia X L Z per punctum L ad C F parallela.

a Per præc. Ergo a angulus X L O par eſt alterno F O L; Quod fieri non poteſt, cùm per hyp. A L O par ſit eidem F O L.

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 45. Fig. 46. *SI duas rectas (AB, CF) ſecans recta (G O) fecerit externum (G L B) æqualẽ oppoſito interno (L O F) vel duos ad eaſdem partes internos A L O, C O L pares*

pares duobus rectis, erunt (A B, C F) parallelæ.

Per 15. GLB æquatur A L O oppoſito ad verticem. Sed per hyp. G L B æquatur L O F. Ergo etiam A L O æquatur ſibi alterno L O F. Ergo *b* A B, C F ſunt parallelæ. b *Per præced.*

Deinde C O L cum F O L facit duos rectos. Sed per hyp. idem COL etiam cum A L O facit duos rectos. Ergo A L O, F O L alterni æquales ſunt. Ergo rurſum A B, C F *c* ſunt parallelæ. c *Per præc.*

Corollarium.

EX ſecunda parte patet omne rectangulum eſſe parallelogrammum.

PROPOSITIO XXX.

SI duæ rectæ (A B, C F) ſint parallelæ ad eandem rectam (D N) erunt inter ſe parallelæ. *Fig. 45.*

Patet per ſe, & ex præcedentibus. Nam ſi omnes ſecentur à recta G O, erit *a* angulus externus G L B par interno L D N. eſt vero L D N externus *b* reſpectu D O F, ac proinde æqualis. Ergo etiam G L B par eſt L O F. Ergo A B, C F ſunt *c* parallelæ.
a *Per 27. l. 1*
b *Per 27. l. 1*
c *Per præc.*

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 48. *PEr datum punctum (A) parallelam ducere ad rectam datam (CF.)*

a Per 23. 1. Ex A ducatur vtcunque A L, ſecans datam F C. Ad punctum A fiat *a* angulus L A S par angulo A L F. Erit A S parallela ad C F, vt patet ex 28. cum alterni anguli S A L, F L A ſint æquales.

Praxis. ducta A L, centro L deſcribe arcum I Q, & centro A eodem interuallo arcum O X, ex quo aufer O B parem I Q. Per A & B ducta recta erit parallela.

Demonſtratio pendet ex 29. l. 3.

Fig. 49. *Aliter. Centro quopiam P deſcribe circulum qui tranſeat per datum punctum A, & ſecet datam CF in Q & O. Arcui Q A accipe æqualem ON, recta AN erit parallela.*

Demonſtratio pendet ex 29. libri 3. & ex 28. huius.

Scholium.

DEmonſtrata iam igitur eſt parallelarũ theoria independenter ab axiomate, quod Euclides, eiuſq; interpretes aſſumunt minus rectè; cum non ſit axioma, ſed theorema, cuius veritas non magis per ſe appareat, quã ipſius 29. propoſitionis. Quia tamen deinceps ſæpius adhibebitur, id hoc loco iam facilè ex præmiſſis demonſtrabimus.

Theo-

Theorema.

Si recta M A incidens in rectas B C, A D, faciat angulos internos ad eaſdem partes B A D, A B C, duobus rectis minores, rectæ B C, A D concurrent verſus eam partem, quam ſpectant anguli duobus rectis minores. Fig. 50.

Quoniam per hyp. C B A, D A B duobus rectis ſunt minores; ſiant C B A, X A B duobus rectis æquales: Eruntq; B C, A X a parallelæ. Aſſumo tanquam axioma per ſe notũ, inter rectas A D, A X in infinitũ productas duci poſſe aliquam ad A M parallelã, puta Z X, quæ maior ſit quam A B. Accipiatur ipſi Z X æqualis A R, & iunge Z R. Quoniã A R, Z X ſunt parallelæ, erunt b alterni X Z A, R A Z æquales. Sunt autem & latera X Z, Z A æqualia lateribus R A, A Z, per conſtr. Ergo etiam c anguli R Z A, X A Z æquales ſunt. Ergo R Z, eſt d parallela ad A X. Sed etiam B C eſt parallela ad A X. Ergo R Z & B C ſunt e parallelæ. Eſt igitur B C & parallela ad R Z, & incluſa triangulo A R Z. Ergo cum produci in infinitum poſſit, neceſſariò occurret aliquando rectæ A Z, nam neque euadere poteſt per ſibi parallelam R Z, neque pertingere in A, aliàs duæ rectæ haberent commune ſegmentum. Liquet ergo propoſitum.

a Per 29. l. 1.
b Per 27. l. 1.
c Per 4. l. 1.
d Per 28. l. 1.
e Per 30. l. 1.

Demonſtratio Clauij eſt à parallelis independens, ſed prolixiſſima & multùm operoſa: Procedit hoc principio, quòd recta vnam parallelã ſecans, etiam alteram ſectura ſit, ſi producatur. Ve-

rum hoc per ſe notum non eſt, ob orationem datam ad deſ. 36.

Corollarium.

Fig 50. *Hinc patet rectas non parallelas concurrere, de quo dubitari poterat, ob rationem allatam ad deſ. 36. Sint rectæ non parallelæ B C, A Z. Duc A X parallelam ad B C, erunt X A B, C B A*
o Per 27. l. 1 *duobus rectis o æquales. Ergo Z A B, C B A ſunt duobus rectis minores, Ergo per theorema iam demonſtratum B C, A Z concurrunt.*

PROPOSITIO XXXII.

PARS I.

Fig. 51. *Omnis trianguli externus quiuis angulus (F B C) duobus internis oppoſitis (A & C) æqualis eſt.*

a Per 31. l. 1. Per B duc a B L parallelã ad A C. Quia duas parallelas B L, A C ſecat F A, erit ex-
b Per 27. l. 1 ternus angulus F B L interno A b æqualis. Et quia eaſdem parallelas B L, A C ſecat etiam recta B C, erit L B C ſibi alterno C
c Per eand. c æqualis. Ergo totus F B C æquatur vtrique ſimul A & C. Quod erat demonſtrandum.

Corollaria.

Fig. 51. 1. EXternus angulus (F B C) quolibet internorum oppoſitorum, A, vel, C, maior eſt.

2. An-

2. Angulorum (C & A O B) eandem baſim (A B) habentium, maior eſt (A O B,) qui intra cadit. Fig. 39.

Producatur enim A O, in F. A O B per hanc maior eſt quam O F B; & O F B per hanc eandem maior eſt quàm C. Ergo A O B multò maior eſt quam C.

3. Si ab vno puncto (A) in vnam rectam (B C) incidant duæ rectæ altera (A O) obliquè, perpendiculariter verò altera (A F), hæc cadet verſus partes acuti anguli A O B. Cadat enim, ſi fieri poteſt, verſus obtuſum A O C, puta in Q. Igitur acutus A O B erit externus, reſpectu recti A Q B, ac proinde illo maior per coroll. 1. quod eſt abſurdum. Fig. 55.

PROPOSITIO XXXII.

PARS II.

OMnis trianguli tres ſimul anguli, duobus rectis ſunt æquales.

Ac proinde conficiunt gradus 180.

Produc vnum latus A B in F. Externus angulus F B C, duobus internis oppoſitis A & C æqualis a eſt. Atqui b F B C cũ C B A efficit duos rectos. Ergo etiam duo A & C cum eodem C B A efficiunt duos rectos. Quod erat demonſtrandum. Fig. 52.

a Per 1 partem huius.

b Per 13. l. 1.

Aliter. Ducatur H M parallela lateri Fig. 53.

A G. Anguli alterni tam O, A, quàm N, C æquales [c] ſunt. Sed Q, Q, N conficiunt [d] duos rectos. Ergo etiam A, C, Q duos rectos conficiunt; quod erat demonſtrandum.

c Per 27. l. 1.
d Coroll. 1. p. 13. l. 1.

Corollaria.

4. TRes ſimul anguli cuiuſuis trianguli æquales ſunt tribus ſimul cuiuſcunque alterius.

5. Si in triangulo vnus rectus eſt, reliqui ſunt acuti.

6. Si in triangulo vnus eſt rectus, reliqui duo ſimul etiam vnum rectum conficiunt.

7. In triangulo angulus, qui æquatur duobus reliquis, rectus eſt,

8. Cum ſcitur quot graduum ſit vnus angulus, ſcitur etiam quot gradus faciant duo reliqui ſimul. Et cum ſcitur quot gradus faciant duo anguli, aut eorum ſumma, ſcitur etiam quot gradus efficiat tertius.

9. Cum in vno triangulo duo anguli aut ſinguli, aut ſimul, æquales ſunt duobus angulis aut ſingulis, aut ſimul, in altero triangulo; etiam tertius tertio æqualis erit.

10. Cum duo triangula vnum angulum æqualem habent, etiam reliquorum ſummæ æquantur.

11. Cum in Iſoſcele angulus æquis cruribus contentus eſt rectus, reliqui ad baſim

ſunt

ſunt ſemirecti. Et Iſoſcelis ad baſim anguli ſemper ſunt acuti.

12. Trianguli æquilateri angulus facit duas tertias vnius recti. Facit enim tertiam partem duorum rectorum. Ergo duas tertias vnius.

13. Hinc anguli recti (B A C) facillima triſectio; ſi ſuper A C fiat triangulū æquilaterum Z. Nam cum F A C ſint duæ tertiæ vnius recti, erit B A F recti vna tertia. Fig. 54.

14. Perpendicularis A F eſt breuiſſima omnium quæ ex puncto (A) ad rectam aliquam duci poſſunt. Quoniam enim angulus F rectus eſt, erit per coroll. 5. A O F acutus. Ergo *f* A F minor quam A O quælibet. Fig. 55. f Per 19. l. 1.

15. Ex vno puncto ad vnam rectam tantum vna perpendicularis cadit. Patet ex coroll. præced.

Scholium.

Huius pulcherrimi, fæcundiſſimiq́; theorematis, cuius per Matheſim vniuerſam vſus prope immenſus, inuentor eſt Pythagoras teſte Eudemo veteri geometra. Frequentiſſimè eiuſdem meminit Ariſtoteles, qui illud etiā exemplum ſtatuit perfectiſſimæ demonſtrationis. Sed quemadmodum ex hac propoſitione iam didicimus, quot rectis angulis eius anguli æquiualeant, ita eiuſdē beneficio cuiuſlibet figuræ rectilineæ ſiue interni, ſiue externi

anguli, quot rectos conficiant, præclarè innoteſcet tribus ſequentibus theorematibus.

Theorema 1.

Fig 56.

OMnis quadranguli quatuor ſimul anguli efficiunt quatuor rectos.

Nam ſi per oppoſitos angulos ducas rectã B F, hæc quadrangulum in duo triangula ſecabit, quorum anguli ſimul conficiunt a *rectos quatuor.*

a Per 32.l.1.

Theorema 2.

OMnes ſimul anguli cuiuſcunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos demptis quatuor, quot ſunt latera figuræ.

Fig. 57.

Ex quouis puncto A intra figuram, ducantur ad omnes figuræ angulos rectæ, quæ ſecabunt figuram in tot triangula, quot habet latera. Quare cum ſingula triangula a *conficiant duos rectos, omnia ſimul conficient bis tot rectos, quot ſunt latera. Sed anguli circa punctum A,* b *conficiunt quatuor rectos. Ergo ſi ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa A, anguli reliqui, qui componunt angulos figuræ, conficient bis tot rectos, demptis quatuor, quot ſunt latera figuræ.*

a Per 32.l.1

b Coroll.3. p.13.l.1.

Hinc patet omnes eiuſdem ſpeciei rectilineas figuras æquales habere angulorum ſummas; Quod admiratione dignum eſt.

Praxis. Duplica denominatorem figuræ: à producto aufer 4. reſtabunt anguli recti, quos conficiunt anguli interni figuræ.

Theore-

Theorema 3.

OMnes ſimul externi anguli cuiuſcumque figuræ rectilineæ, conficiunt quatuor rectos. Fig. 58.

Nam ſinguli figuræ interni anguli, cum ſingulis externis conficiunt duos c rectos. Ergo interni ſimul omnes, cū omnibus ſimul externis conficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ. Sed (vt in præced. oſtendimus) interni ſimul omnes etiam cum quatuor rectis, efficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ. Ergo externi anguli, & quatuor recti æquantur. c Per 13. l. 1.

Mira ſanè hæc figurarum rectilinearum proprietas eſt: ex quā illud etiam conſequitur, omnes cuiuſcunque ſpeciei rectilineas figuras æquales habere externorum angulorum ſummas. Itaque trianguli alicuius tres externi anguli æquales ſunt mille externis angulis figuræ millelateræ; Quæ prorſus admiratione ſunt digna.

PROPOSITIO XXXIII.

SI duas rectas æquales & parallelas (A B, C F) iungant duæ aliæ (A C, B F) erunt etiā illæ æquales parallelæ. Fig. 59.

Parallelas A B, C F ſecet A F. Erunt in triangulis Q, R alterni anguli B A F, C F A a æquales. Ponitur autem latus A B æquale a Per 27. l. 1.

le lateri C F, & A F vtrique triangulo eſt
b *Per 4. l. 1.* commune. Ergo *b* baſes B F, A C æquantur (quod erat primum.) Et anguli ad baſim A F B, F A C ſunt æquales: ac proinde A F incidens in rectas A C, B F facit al-
c *Per 28. l. 1.* ternos A F B, F A C æquales. Ergo *c* A C, B F ſunt etiam parallelæ. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 59. P*Arallelogrammi oppoſita latera & anguli æquantur, ipſumque à diametro biſecatur.*

a *Per defin. 35.* Quoniam A B, C F ſunt *a* parallelæ, in eaſque incidit A F, erunt alterni B A F,
b *Per 27. l. 1.* C F A *b* æquales. Item quia A C, B F ſunt
c *Per def. 35.* *c* parallelæ, in eaſque incidit A F, erunt *d*
d *Per 27. l. 1.* alterni C A F, B F A æquales. Ergo totus B A C toti B F C æqualis eſt. Eodem modo oſtendam B & C æquales eſſe. Quod erat primum.

Quia verò iam oſtendi triangula Q R, quæ vnum latus A F commune habent, etiam angulos lateri A F adiacentes habere æquales, nimirum B A F ipſi C F A, &
e *Per 26. l. 1.* C A F ipſi B F A. Erunt *e* etiam latera A B ipſi F C, & B F ipſi C A, æqualia, itemque ipſa triangula.

Sche-

Scholium.

Partim ex hoc theoremate, partim ex definitione libro 2. præmittenda, facilè elicitur dimenſio parallelogrammi rectanguli. Illius area producitur ex multiplicatione duorum laterum contiguorum A F, A C. Sit exem. gr. A F pedum 8. A C, 4. Duc 8. in 4. prouenient 32. pedes quadrati pro area rectanguli. Fig. 60.

Quadrata vero area habetur ex uno latere (F I) per ſe ipſum multiplicato: vt ſi latus (F I) ſit 5. pedum; duc 5. in ſe, prouenient. 25. pedes quadrati pro area quadrati. Fig. 61.

Demonſtratio ex hac prop. patet ductis per laterum diuiſiones parallelis.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

Parallelogramma ſuper baſi eadem (A B) vel æquali, & inter eaſdem parallelas (C Q, A X) conſtituta, ſunt æqualia. Fig 62.

Quia A L, B Q [a] ſunt parallelæ, eaſque ſecat C Q; erit [b] externus C L A par interno F Q B. Deinde quia tam C F quam L Q æquantur [c] eidem A B, erunt C F, L Q, æquales. Adde vtriſque F L; erunt totæ C L, F Q æquales. Inſuper & A L, B Q

a Per def. 35.
b Per 27. l. 1.
c Per 34. l. 1.

[d] æquales

d Per eand. [d] æquales ſunt. Triangula igitur C L A,
e Per 4.l.1. F Q B æqualia [e] ſunt. Ergo ablato communi F O L, plana F O A C, Q B O L remanent æqualia. Quibus vtriſque adde planum A O B, fiunt parallelogramma tota A C F B, A L Q B æqualia. Quod erat demonſtrandum.

Hæc propoſitio fiet vniverſalis p. 1. lib. 6. Obſeruent hic tyrones, quamuis parallelogramma inter eaſdem parallelas ſine fine productas in infinitam longitudinem extendantur ex eadem baſi A B, ſemper tamen manere æqualia ex vi demonſtrationis iam datæ.

Scholium.

Fig. 62. *Ex hoc theoremate habetur dimenſio parallelogrammi cuiuſcunque. Illius igitur area producitur ex altitudine Q X ſeu C A ducta in baſim A B.*

Nam area rectanguli C B parallelogrammo
f Per ſchol. præced. *B L æqualis ſit* [f] *ex A C ducta in A B. Ergo &c.*

PROPOSITIO XXXVII. & XXXVIII.

Fig. 63. *Triangula (A C B, A F B) ſuper baſi eadem (A B) vel æquali inter eaſdem parallelas (C I, A Z) conſtituta, ſunt æqualia.*

Lateribus A C, A F duc parallelas B L, B I.

BI. Parallelogramma A C L B, A F I B ſunt *a* æqualia. Sed horum triangula data *b* ſunt dimidia. Ergo triangula data *c* ſunt æqualia.

a Per præc.
b *Per* 34.*l*.1.
c *Per axio*. 6

Hæc propoſitio fiet univerſalis p. 1, *l.*6. *Idem hîc tyrones notent in triangulis, quod eos notare iuſsimus prop. præced. de parallelogrammis.*

PROPOSITIO XXXIX. & XL.

TRiangula æqualia (*A C B, A F B*) *ſuper eadē baſi* (*A B*) *vel æqualia ad eaſdem partes conſtituta, ſunt inter eaſdem parallelas* (*A B, C F.*) *Fig.*64.

Si negas, ſit C L parallela ad A B, & ducatur B L. Igitur A L B æquatur *a* A C B. Sed ex hyp etiam A F B ipſi A C B æquale eſt. Ergo A L B, & A F B æqualia ſunt, pars & totum. Quod fieri non poteſt. Igitur &c.

a *Per præc.*

PROPOSITIO XLI.

SI triangulum (*A F B*) *ſit in iiſdem parallelis cum parallelogrāmo* (*A L*) *& baſim eandem habeat* (*A B*) *vel æqualem, ipſius dimidium erit.* *Fig.*65.

Duc C B. Triangula AFB, & ACB *d* æquan-

d *Per* 37. & 38.*l*.1.

k Per 34. l. 1. quantur. Sed k A C B eſt dimidium parallelogrammi A L. Ergo etiam A F B eſt dimidium A L. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Fig. 65. *EX hac, & ex ſcholio prop. 35. diſcimus, aream trianguli (A F B) cuiuſcunq; produci ex dimidia altitudine F I ducta in baſim (A B) vel ex dimidia baſi in altitudinē. Quare noto vno latere trianguli, & altitudine, ſiue perpendiculari, quæ in latus notum ex angulo oppoſito ducitur, habetur trianguli dimenſio: vt ſi baſis A B ſit pedum* 100. *altitudo F I,* 85. *multiplica baſis dimidium* 50. *per* 85. *prouenient* 4250. *pedes quadrati pro area trianguli A F B. Porro altitudo ſiue perpendicularis illa, quādo area trianguli peragrari poteſt, mechanicè innoteſcit, vti latera. Si area peragrari nequeat, inuenietur geometricè altitudo per* 12. & 13. *l.* 2. *vt in ſcholio ibidem docebimus.*

In triangulo rectangulo altitudo eſt eadem cum alterutro latere circa angulum rectum. Huius ergo ſemiſſis ducta in latus alterum rectu adiacens dabit trianguli aream.

PROPOSITIO XLII.

Fig. 66. *DAto triangulo (A C B) æquale parallelogrammum facere habens angulum parem dato (O.)*

Ba-

Baſim A B biſeca in F. per C duc C X parallelam A B *a*. Fac *b* angulum B A L parem dato O. Duc F I parallelam A L. *c* Erit A L I F, quod quæritur. a Per 31. l. 1. b 23. l. 1. c Per 31. l. 1.

Ducatur enim F C. Parallelogrammum A I, angulum habet L A F parem dato, O; & eſt æquale triangulo dato A C B, cum tam *d* triangulum A C B, quàm *e* parallelogrammum A I, dupla ſint eiuſdem trianguli A C F. d Per 38. l. 1. e Per præc.

Corollarium

Dato triangulo A C B habetur æquale rectangulum, ſi per C ducatur parallela lateri A B; & biſecta A B in F, ex B erigatur perpendicularis B Q. Erit enim rectangulum ſub F B, & Q B par triangulo A C B. Fig. 66.

PROPOSITIO XLIII.

In parallelogrammo (B L,) complementa (B O, O L) eorum, quæ circa diametrum exiſtunt (R F & C S) ſunt æqualia. Fig. 67.

Si per diametri A Q, punctum quoduis O ducatur C F parallela lateri A B, & R S parallela lateri B Q; ſecatur totum B L in quatuor parallelogramma; quorum duo circa diametrum ſunt, R F, C S, duo reliqua B O, O L, ſunt horum complementa.

Ea

Ea eſſe æqualia ſic oſtenditur. Triangu

a Per 34. l. 1. A B Q, A L Q a æquantur, ſimiliter AR(

b Per eand. O C Q b æquantur A F O, O S Q. Ergo ab æqualibus A B Q. A L Q, auferas æqualia, hinc A R O, O C Q, inde A F O, OSQ æqualia remanent B O, & O L. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 68. *AD datam rectam (O S) parallelogrammum cõſtituere dato triangulo (V) æquale in angulo dato (X).*

f Per 42. l. 1. Fac f parallelogrammum R C dato V æquale, habens angulum R O C parem dato X, & pone latus R O in directum datæ O S.

g Per 31. l. 1. Per S duc S Q g parallelam O C, cui occurrat B C producta in Q. Per Q & O ducta recta occurrat B R protractæ in A. Per A duc A L parallelam ad O S, cui occurrant C O, & Q S productæ in F & L. parallelogrammum O L eſt quod petitur.

i Per prac. Nam O L i æquatur R C; hoc eſt per conſtructionem, dato triangulo V: & eſt

k Per 15. l. 1. ad datam O S, habetque angulum k F O S parem angulo R O C, hoc eſt per conſt. parem dato X.

PRO-



PROPOSITIO XLV.

D*Ato rectilineo* (*CBA*) *æquale parallelogrammum cõſtruere ad datam rectam* (*I Q*) *&* *in dato angulo* (*H.*) Fig. 69.

Rectilineam reſolue in triangula A, B, C ducendo rectas F L, F I.

Ad datam I Q in angulo dato, H, fac *a* parallelogrammũ I V æquale triangulo, A. Tum producatur IR infinitè verſus P: & ad rectã R V, in angulo V R P fac *b* parallelogrammum R Z æquale trigono B. Rurſum ad rectam S Z in angulo Z S P fac parallelogrammum S G æquale trigono C. I G eſt parallelogrammum quæſitum.

a *Per 44. l. 1.*

b *Per eand.*

Nam *c* angulus Z V R par eſt ſibi alterno I R V. Sed *d* Q V R & I R V ſunt æquales duobus rectis. Ergo etiam Q V R & Z V R duobus rectis æquantur. Ergo *f* Q V & Z V ſunt in directum. Pari modo oſtendã Q Z & G Z eſſe in directum. Ergo tota Q V Z G eſt vna recta, & quidem parallela ad I X, cum per conſt. Q V ſit ad I P parallela. Eſt vero etiam *g* X G parallela ad I Q, cum X G ſit parallela ad S Z, & S Z ipſi R V, & R V ipſi I Q.

c *Per 27. l. 1.*

d *Per eand.*

f *Per 14. l. 1.*

g *Per 30. l. 1.*

Ergo *h* I G eſt parallelogrammum: eſſe autem quale petitur patet ex conſtructione.

h *Per defin. 35.*

Scholium.

ADiungo problema utile futurum ad praxim propoſitionis 14.l.2.

Fig.70. tabulâ.2. *Dato quadrangulo B F rectangulum æquale deſcribere.*

Reſolue in triangula per rectam A C. Ex oppoſitis angulis demitte perpendiculares B O, F I. biſeca AC in S. Ex S erige perpendicularē S L parem duabus B O, F I. Rectangulum ſub L S, & S A æquatur dato B F. Demonſtratio patet ex 41.

PROPOSITIO XLVI.

A Datâ rectâ (A B) quadratum deſcribere.

Fig.71. Erige duas perpendiculares æquales datæ A B nempe A C, B E, & iunge C E. Dico factum.

a Per conſtr. b Per 29.l.1 c Per conſtr. d Per 33.l.1. Cum enim anguli A & B duo ſint *a* recti, erunt *b* A C, B E parallelæ: ſunt verò etiam *c* æquales. Ergo C E *d* A B ſunt parallelæ & æquales, Ergo figura eſt parallelogramma, & æquilatera: anguli quoque omnes ſunt recti (cum enim A, & B ſint e Per 34.l.1. *e* recti, etiam recti erunt *f* oppoſiti, E, & C.) Ergo figura A E, eſt quadratum.

PROPOSITIO XLVII.

IN omni triangulo (A B C) rectangulo, quadratũ lateris (A C) quod recto angulo opponitur, æquale eſt duobus ſimul reliquorum laterum (A B, C B) quadratis. Fig. 7a.

Ducantur I C, B F, & B E parallela A F. Si angulis I A B, F A C rectis, ac proinde æqualibus, addatur communis B A C, erunt toti I A C, F A B æquales. Sunt verò in triangulis I A C, F A B etiam latera, quæ æquales illos angulos continent, inter ſe [a] æqualia, nempe, I A, C A, ipſis B A, F A, alterum alteri. Ergo triangula I A C, F A B, [b] æquantur: Quæ, quia cum parallelogrammis A B L I & Z A F E conſiſtunt in iiſdem baſibus I A, F A, & in iiſdem parallelis I A, L B C, & A F, E Z B ſunt [c] eorum dimidia. Ergo parallelogramma A B L I, Z A F E, vtpote æqualium dupla, erunt æqualia inter ſe. Eodem diſcurſu ductis rectis A X, B R oſtendam parallelogramma, E C, B X æqualia eſſe. Totum igitur A R vtriſque I B, & B X æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

a Per defin. quadrati.
b Per 4. li.
c Per 41. li.

Aſſumptum fuit L B C eſſe parallelam I A, adeoq; L B, B C eſſe vnam rectam. Id

verò patet ex 14. cum anguli L B A, & C B A ambo recti ſint per hypotheſim.

Scholium.

Hoc theorema (quod prop. 31. lib. 6. Euclides ad omnes figuras ſimiles extendit) Pythagoricum appellatur paſſim, ab inuentore Pythagora; qui, vt teſtantur Proclus, Vitruuius, alijq́; Muſis victimas immolauit, quod ſe in tam præclaro inuento ab ijs adiutum putaret. Ignorabat videlicet ſcientiarum Dominum, verum & vnicum omnis ſapientiæ auctorem Deum; aut certè ſi cognouit, non ſicut Deum glorificauit. Frequens porro huius theorematis & eximius per Mathematicam totã vſus eſt; ac viam inprimis ad incommenſurabiles magnitudines, arcanum ingens Geometricæ philoſophiæ cognoſcendas aperit.

Quadrati latus eſſe diametro incommenſurabile, celebratiſſimum eſt apud veteres Philoſophos, Ariſtotelem præſertim & Platonem, adeo vt qui hoc neſciret, eum Plato non hominem eſſe, ſed pecudem diceret. Notitia porro huius myſterij duxiſſe videtur originẽ ex hac prop. 47. Nã cum in quadrato angulus A rectus ſit, erit quadratum diametri CB æquale quadratis laterum AB, AC ac proinde duplum vnius. Quare cum quadratum diametri CB ſit 2. & quadratũ lateris AB, ſit vnitas, erit diameter CB radix quadrata, 2. & latus AB radix quadrata vnitatis, ſiue ipſa vnitas, quarum proportio (vt ſuo loco demonſtrabitur) numeris explicari

Fig. 71.

plicari nequit, ac proinde incommenſurabiles ſunt.

Atque hoc vel vnico argumento, tametſi cetera omnia deficerent, euidentiſſimè conficitur, magnitudines ex definito punctorum numero componi non poſſe: alias enim nullæ eſſent incommenſurabiles, omnium quippe menſura communis eſſet punctum.

His ſubiungo tria problemata ex eadem propoſitione deducta, quorum vſus frequentior.

Problema I.

DAtis quotcunque quadratis, vnum omnibus æquale conſtruere. Fig. 73.

Dentur quadrata tria, quorum latera ſint AB, BC, CE. Fac angulum rectum FBZ infinita habentem latera, in eaq́; transfer BA, & BC & iunge AC. erit ex AC quadratum æquale a quadratis AB, BC. Tum AC transfer ex B in X: & CE tertium latus datum, transfer ex B in E, & iunge EX; erit quadratum ex EX æquale b quadratis ex EB (ſeu EC) & ex BX: hoc eſt æquale tribus datis quadratis ex AB, ex BC, ex CE.

a Per 47. l. 1

b Per eand.

Problema 2.

DAtis duabus rectis inæqualibus AB, BC, exhibere quadratum, quo quadratum maioris AB, excedit quadratum minoris BC. Fig. 74.

Centro B interuallo BA deſcribe circulum. Ex C erige perpendicularem CE, occurrentem peri-

pheria in E. Quadratum ex C E eſt exceſſus quæſitus.

Ducatur enim B E. quadratum B E, hoc eſt A B, æquatur ᵉ quadrato B C, & quadrato C E. Ergo &c.

ᵉ Per 47. l. 1

Problema 3.

NOtis duobus quibuſcunque lateribus trigoni rectanguli, reliquum inuenire.

Fig. 75. Latera rectum angulum ambientia ſint A C, A B, hoc 6. pedum, illud 8. Oporteat inuenire quot pedum ſit C B recto oppoſitum. Duc 6. & 8. in ſe ipſa: orientur laterum quadrata 36. & 64. quorum ſumma eſt 100. Radix quadrata 100. nempe 10. dat pedes lateris B C quæſiti. Demonſt. patet ex 47. Nam ſumma quadratorum B A & A C æquatur quadrato B C. Ergo horum ſummæ radix eadem eſt cum radice ſeu latere B C.

Nota ſint deinde latera A B, B C, hoc 10. pedum, illud 6. Oporteat inuenire A C. Lateris A B quadratum 36. auſer ex 100. quadrato lateris B C. Reſiduum 64. erit quadratum lateris A C. Radix ergo 64 (nempe 8.) dat pedes lateris A C.

PROPOSITIO XLVIII.

Fig. 76. SI quadratũ ab vno trianguli latere (A B) deſcriptum ſit æquale duobus reliquorum laterum (A C, B C) quadratis; angulus (A C B) quem reliqua latera continent, rectus erit.

Si

Si negas, erit angulus A C B recto maior aut minor. Ergo (vt demonſtrabitur prop. 12. & 13. l. 2. quæ ab hac non dependent) quadratum A B non erit æquale quadratis A C, B C, contra hypotheſim.

Vel ſic. Duc F C perpendicularem ad A C, & æqualem C B, & iunge A F. Quadratum A F æquale eſt *a* quadratis F C, C A; hoc eſt *b* quadratis B C, C A; hoc eſt per hyp. quadrato A B. Ergo rectæ A F, A B æquales ſunt. Quoniam igitur trigona X, Z, ſunt ſibi mutuo æquilatera, anguli ad C *c* ſunt æquales. Ergo *d* recti. Quod erat demonſtrandum.

a *Per* 47. *l.* 1.
b *Per conſtruct.*
c *Per* 8. *l.* 1.
d *Per def.* 14.

ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

LIBER SECVNDVS.

HIc liber mole paruus; at præſtantiâ ac vtilitate theorematum planè magnus. Tyrones, ſcio quod dico, nondum capient; ſed eſſe veriſſimum vlterius prouecti, vſu ipſo certiſſimè intelligent.

DEFINITIO.

Fig. 60. l. 1. PArallelogrammum rectangulum (A E) (quod rectangulum ſimpliciter ſine vllo addito appellari ſolet) contineri dicitur ſub duabus lineis rectis (A C, A F) rectum angulum comprehendentibus.

Nam earum altera A C altitudinem rectanguli, altera A F latitudinem determinat. Deinde ſi intelligatur latus AC ferri perpendiculariter per totam A F, aut A F per totam A C, producetur eo motu area rectanguli. Quare merito rectangulum fieri dicitur ex ductu, ſeu multiplicatione duorum laterum contiguorum.

Fig. 2. lib. 2. *Quando igitur dicitur ex. gr. rectangulum ſub (vel ex) A C, C B, vel breuitatis cauſa, rectangulum A C B, deſignatur rectangulum quod con-*

tinetur

tinetur ſub AC, & CB ad rectum angulum conſtitutis. Similiter; cum dicitur rectangulum ſub AB, CB, vel rectangulum ABC, deſignatur rectangulum contentum ſub rectis AB, & BC rectum angulum comprehendentibus. Fig. eadem.

Rectangulum porro aliud eſt oblongum, aliud quadratum. Oblongum eſt quod latera contigua habet inæqualia, ſiue quod continetur ſub duabus rectis inæqualibus. Quadratum rectangulum eſt, quod ſub duabus æqualibus continetur.

NOTA.

Signum æqualitatis in hoc libro eſt. Æ.

PROPOSITIO PRIMA.

SI fuerint duæ rectæ (AB, AC) quarum altera ſecta ſit in quotcunque partes (AE, EF, FC;) erit rectangulũ ſub illis duabus (AB, AC) comprehenſum, æquale rectangulis, quæ ſub inſecta (AB) & ſingulis ſectæ partibus (AE, EF, FC) continentur. Fig. 1. lib. 2.

Statue AB perpendicularem ad AC, per B duc infinitã BR perpendicularẽ ad AB. Ex E, F, C erige perpendiculares EI, FL, CQ. Erit BC rectangulũ ſub AB, & AC; & eſt æquale rectangulis BE, IF, LC; hoc eſt (quia tam IE, quàm LF ſunt *a* æquales ... *a* Per 29. & 34. l. 1.

les A B) rectangulis ſub A B, A E, ſub A B, E F, ſub A B, F C.

Scholium.

Decem prima huius libri theoremata etiam vera ſunt in numeris, ſi vt lineæ diuidantur in partes. Rectangula numerica procreantur ex multiplicatione duorum numerorum, quadrata vero numerica ex multiplicatione numeri per ſe ipſum.

PROPOSITIO II.

Fig. 2. *SI recta (AB) ſecta ſit vtcunque (in C) duo rectangula, ſub tota (A B) & partibus (A C, C B) comprehenſa, quadrato totius æqualia ſunt.*

Accipiatur F æqualis A B.

b Per 1. l. 2. Rect. F A B. æ. b rect. F A C, rect. F C B

hoc eſt, quia F & A B ſunt æquales inter ſe

Quad. ex A B. æ. rect. B A C, rect. A B C

PROPOSITIO III.

Fig. 3. *SIt recta (A B) vtcunq; ſecta (in C) erit rectangulum ſub tota (A B) & partium alterutrâ (B C) comprehenſum, æquale rectangulo ſub partibus (A C,*

(A C, C B) vna cum quadrata prædictæ partis (B C.)

Aſſume F æqualem C B.

Rect. A B F. Æ. d rect. A C F } rect. C B F } — d Per 1. l. 2.

hoc eſt, quia æquales ſunt C B & F,

Rect. A B C. Æ. rect. A C B. } quad. C B. }

PROPOSITIO IV.

Sit recta (F L) vtcunq; ſecta (in O;) erit quadratum totius æquale quadratis partiũ (F O, O L) & bis rectãgulo ſub partibus (F O, O L) contento. — Fig. 4.

Quad. F L. Æ. e rect. F L O cum rect. L F O — e Per 2. l. 2.

Atqui rect. F L O. Æ. f rect. F O L } quad. O L } — f Per 3. l. 2.

& rect. L F O. Æ. rect. L O F } quad. F O }

Ergo quad. F L. Æ g rect. F O L } quad. O L } rect. F O L } quad. F O. } — g Per eand.

Id eſt quad. F L. Æ. rect. F O L bis } quad. O L } quad. F O. }

PRO-

PROPOSITIO V.

Fig. 1. *SI recta (Q X) ſecta fuerit æqualiter (in R) & inæqualiter (in S;) erit rectangulum ſub inæqualibus partibus (Q S, S X) contentum, unà cum quadrato partis intermediæ (R S) æquale quadrato dimidiæ (Q R.)*

Rect. Q S X b Æ { rect. Q R, S X
rect. R S X }

b Per 1. l. 2. Atqui ob æqualitatem rectarum Q R, R X.
Rect. Q R, S X Æ rect. R X S,
id eſt

c Per 3. l. 2. Æ. c { rect. R S X
quad. S X }

Ergo rect. Q S X. Æ. { rect. R S X
quad. S X
rect. R S X }

Addatur utriſque quad. R S. habebitur

d Per 4. l. 2. { rect. Q S X
quad. R S } Æ. { rect. R S X
quad. S X
rect. R S X
quad. R S } id eſt d quad. R X ſeu Q R

PROPOSITIO VI.

Fig. 6. *SI recta (AB) ſit bifariã ſecta (in C,) eiq; recta quædã adjiciatur (B F;)*

erit

erit rectangulum ſub tota compoſita (A F) & adiecta (B F) contentum, vnà cum quadrato dimidiæ (C B) æquale quadrato (C F) compoſitæ ex dimidia & adiecta. d

Adde indirectum L A, æqualem adiectæ B F. Cum æqualibus A C, B C, æqualia addantur A L, B F, erunt totæ L C, F C æquales. Vnde L F ſecta erit æqualiter in C, & inæqualiter in B.

Ergo { rect. L B F. æ.d quad. C F cum quad. C B. } d *Per 5. huius.*

Sed ob æqualitatem rectarum L B & A F rect. L B F. æ. rect. A F B.

{ Ergo rect. A F B. æ. quad. C F quad. C B. }

PROPOSITIO VII.

SI recta (A B) fuerit vtcunque ſecta (in C) erunt quadrata totius (A B) & ſegmenti alterutrius (A C) æqualia bis rectangulo contento ſub tota (A B) & ſegmento dicto (A C) vnà cum quadrato ſegmenti alterius (C B.) *Fig. 7.*

Quad. A B, a æ. rect. B C A bis { quad. A C quad. B C. } a *Per 4. l. 2.*

Adde

Adde vtriſque quad. A C. erunt

{ Quad. A B. Æ. rect. B C A bis }
{ quad. A C quad. A C bis }
{ quad. B C }

Atqui rect. B C A bis cum quadrato A C bis, æquatur *b* rectangulo B A C bis. Quare ſi pro B C A bis & quad. A C bis ſubſtituamus B A C bis; erit

b Per 3. l. 2.

{ Quad. A B. Æ. rect. B A C bis }
{ quad. A C quad. B C }

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8.

SI recta (L F) fuerit ſecta biſariam (in I) eiq; quædam recta adijciatur (F O) erit rectangulum (L I O) quod ſub (L I) dimidia, & (I O) compoſita ex dimidia & adiecta continetur, quater ſumptum, vnà cum quadrato adiectæ (F O) æquale quadrato totius compoſitæ (L O.)

a Per prec.

{ Quad. I O. *a* Æ. rect. O I F bis }
{ quad. I F quad. F O }

hoc eſt, quia ex hyp. F I, L I, ſunt æquales, ac proinde quad. F I eſt quad. L I, & rect. O I F eſt rect. O I L, ſeu L I O

{ quad. I O. Æ. rect. L I O bis }
{ quad. L I quad. F O }

Quare ſi vtriſque æqualibus addas rect. L I O bis. Erit

quad.

quad. I O
quad. L I
rect. L I O bis.
id eſt
b quad. L O. æ. rect. L I O bis — b Per 4. l. 2.
quad. F O
rect. L I O bis
Id eſt
æ. rect. L I O quater
& quad. F O

PROPOSITIO IX.

SI recta (AC) ſit diuiſa bifariam (in B) & non bifariam (in F:) erunt quadrata partium inæqualium (A F, F C) dupla quadratorum dimidiæ (A B) & partis intermediæ (B F.) — Fig. 9.

quad. A F. æ. a rect. A B F bis — a Per 4. l. 2.
quad. A B
quad. B F
Addito igitur vtriſque quad. F C,
quad. A F. quad. F C æ. rect. A B F bis
quad. A B
quad. B F
quad. F C
Sed rect. A B F eſt rect. C B F, quia A B, B C ſunt æquales ex hyp.

Ergo

Ergo quad. A F. Æ. rect. C B F bis
quad. F C   quad. A B
quad. B F
quad. F C

b Per 4. l. 2. Atqui b C B F bis cum quad. F C æquantur quadrata B C, B F, ſeu A B, B F: quare ſi hæc illis ſubſtituas, erunt

quad. A F. Æ. quad. A B
quad. F C   quad. A B
quad. B F
quad. B F

Id eſt

quad. A B
quad. B F bis

PROPOSITIO X.

Fig. 10. *SI recta (F I) ſit biſecta (in L) eique quædam recta adijciatur (I O:) erũt quadrata totius cõpoſitæ (F O) & adiecta (I O) dupla quadratorũ quæ deſcribũtur ſuper dimidiã (F L) & ſuper (L O) cõpoſitã ex dimidia & adiecta.*

Adijciatur in directum Q F, æqualis I O. Quia ergo etiam F L, I L æquantur ex hyp. erunt totæ Q L, O L æquales, ac proinde Q O biſecta eſt in L, & aliter in I. Ergo

a Per præc. quad. Q I Æ. quad. Q L
quad. I O   quad. L I bis

Sed

Sed quad. Q I eſt quad. F O, & quad. L eſt quad. L O, & quad. L I eſt quad. I.

Ergo { quad. F O. Æ. quad. F L } bis
{ quad. I O quad. L O }

PROPOSITIO XI.

Datam rectã (A B) ita ſecare (in C) vt rectangulum (A B C) ſub totâ & vnâ parte contentum, æquale ſit quadrato partis reliquæ (A C.) Fig. 11.

Ex A erige perpendicularem A F parem B. A F biſeca in X. Duc rectam X B; ex F A producta æqualẽ abſcinde X I. um abſcinde A C æqualem A I. Dico ctum.

Perficiatur quadratum B A F S, & ductâ er C perpendiculari, perficiatur quoque ectangulum F I L O. Quoniam F A biſecta eſt in X, eique adiecta eſt A I, Erit

{ rect. F I A. Æ. d quad. X I } d Per 6. l. 2.
{ quad. X A }

id eſt

Æ. e quad. X B e Per conſtr.

Id eſt

Æ. f quad. B A } f Per 47. l. 1
quad. X A }

Auferatur vtrimque quad. X A. Erit rect. F I A ſeu F L. Æ. quad. B A, id eſt A S

E Quare

Quare ablato rurſum communi A C?
Erit A L. æ. C S

Atqui A L eſt quadratum A C, cum A I, A C ex conſtr. ſint æquales: & C S eſt rect. A B C, cum B S ſit par A B. Ergo rectang. A B C æquatur quadrato A C. Datam igitur rectam ſecuimus, vt petebatur.

Scholium.

Propoſitiones 10. prima huius libri vera ſunt, etiam in numeris. Hæc 11. numeris explicari non poteſt. Neque enim vllus numerus ita ſecari poteſt, vt productum ex toto in partem vnam, æquale ſit, quadrato partis reliquæ. Porro mira vis eſt huius ſectionis, de qua vide prop. 30. l. 6.

PROPOSITIO XII.

Fig. 12. *In trigono obtuſangulo (A C B) quadratum lateris (A B) obtuſo angulo oppoſiti, quadrata laterum reliquorũ (A C, B C) excedit rectangulo (B C F) bis, quod comprehenditur ſub (B C) latere alterutro obtuſum angulũ (A C B) continentium, in quod, cum protractũ fuerit, cadit perpendicularis (A F;) & ſub (F C) interceptã exteriùs latera inter perpendicularem & obtuſum angulum.*

Quad.

Quad. A B. æ. *a* quad. A F } quad. B F } a Per 47. l. 1.

Sed quad. B F eſt *b* æquale quadratis F C, C B, & rect. B C F bis. Ergo ſi hæc ſubſtituas pro quad. B F; erit b Per 4. l. 2.

Quad. A B. æ. { quad. A F
quad. F C
quad. C B
rect. B C F bis }

Atqui quadrata A F, F C æquantur quadrato *c* A C. Quare hoc pro illis ſubſtituto, erit c Per 47. l. 1.

Quad. A B. æ. { quad. A C
quad. C B
rect. B C F bis }

PROPOSITIO XIII.

IN triangulo quocunq; (A C B) quadratum lateris (A B) acuto angulo (C) oppoſiti, à quadratis laterum reliquorũ (A C, B C) exceditur rectangulo (B C F) bis, quod continetur ſub (B C) latere alterutro acutum angulum (C) comprehendentium, in quod cadit perpendicularis (A F) ab oppoſito (A;) & ſub (C F) intercepta inter perpendicularem (A F) & acutum angulum (C.) Fig. 13. 14.

a Per 4. l.2. Quad. B C. Æ. a rect. B F C bis
quad. B F
quad. F C

b Per 47. l.1. Et Quad. A C. b Æ. quad. F C
quad. A F.

Quare duo ſimul { quad. B C. Æ. rect. B F C bis
{ quad. A C. quad. B F
quad. F C bis
quad. A F.

Atqui rectang. B F C bis cum quad.
c Per 3. l.2. F C bis æquatur c rectangulo B C F bis.
Ergo hoc pro illis ſubſtituto

{ Quad. B C. Æ. rect. B C F bis
{ quad. A C quad. B F
quad. A F.

d Per 47. l.1. Atqui quadrata A F, B F, ſunt d quad. A B. Ergo hoc pro illis ſubſtituto

{ Quad. B C. Æ. rect. B C F bis
{ quad. A C quad. A B

Hoc eſt, B C, A C quadrata, excedunt quad. A B rectangulo B C F bis.

Corollarium.

Fig. 15. VEra eſt propoſitio licet perpendicularis cadat extra triangulum. Demonſtratio ferè eadem eſt.

Scholium.

EX hac & 47. lib. 1. habetur dimenſio cuiuſcunque trianguli, cuius tria latera ſint nota, licet

liter aream habeat, impertiam. Horum quippe theorematum beneficio innoteſcit perpendicularis, etiamſi eam impedimenta loci non ſinant deſignari. Perpendicularis autem multiplicata per ſemiſſem lateris, cui incidit, producit aream trianguli, ut patet ex ſcholio propoſ. 41. l. 1.

Eſto trigonum quodcunque A C B nota habens latera. Oporteat notam reddere perpendicularem A F ex dato angulo A in latus oppoſitum B C. Fig 13. vel 14.

Quadratum lateris A B acuto C oppoſiti, aufer ex ſumma quadratorum A C, C B. Per 13. reſiduum erit rectangulum B C F bis. Reſidui ſemiſſem (hoc eſt rectangulum B C F) diuide per notũ latus B C. Proueniet recta C F. Quadratum rectæ C F aufer ex quadrato A C. Reſiduum dabit quadratum b *A F, cuius radix quadrata dabit perpendicularem A F.* b Per prob. 2. ſchol. poſt. 47. l. 1.

Obtinere idipſum poteris etiam ex p. 12. Verum 13. ſufficit, cum in omni triangulo perpendicularis ex aliquo angulo in latus oppoſitum, intra triangulum cadat.

PROPOSITIO XVI.

D*Ato rectilineo (Q X Z) æquale quadratum conſtruere.* Fig. 16.

Rectilineo Q X Z fac æquale a parallelogrammum rectang. C I, cuius latera I A, C A, ſi æqualia fuerint, ipſum erit quadratum, quod petitur: ſi inæqualia ſunt, latus maius I A produc in L, donec A L ſit par a Per 45. l. 1.

A C. I L biſeca in Z; quo centro per I & L deſcribe circulum, & producatur C A, donec circumferentiæ occurrat in B. Quadratum rectæ A B æquale eſt dato Q X Z.

Ducatur enim recta Z B. Quoniam I L ſecta eſt bifariam in Z, & aliter in A: erit

a *Per 5. l. 2.* { rect. I A L. Æ. ᵃ quad. Z L : hoc eſt quad. Z A }

b *Per conſtr.* Æ. ᵇ quad. Z B : hoc eſt

c *Per 47. l. 1* Æ. ᶜ { quad. Z A quad. B A }

Ablato igitur vtrimque quadrato Z A, communi, remanet

rect. I A L. Æ. quad. B A:

hoc eſt, quia A C, A L ſunt æquales, erit

rect. C I. Æ. quad. A B

d *Per conſtr.* Id eſt ᵈ rectil. Q X Z.

Scholium.

Conſtructio Euclidæa requirit, vt per 45. l. 1. rectilineum reducatur ad rectangulum. Quæ reductio cum ſatis operoſa ſit, fortaſſe expeditiùs problema abſoluetur hunc in modum.

Rectilineum datum reſoluatur in tot quadrangula (Z, X) quot poteſt. Tum ſingulis quadrangulis fac ᵉ rectangula æqualia. Si tunc ſuperſit (vt hic contingit) vnum triangulum (Q,) illi quoque fac ᶠ æquale rectangulum, ſingulis deinde rectangulis per hanc 14. fac quadrata æqualia: ac demum his omnibus quadratis vnum æquale ᵍ fiat. Erit hoc æquale dato Q X Z.

e *Per ſchol. p. 45. l. 1.*
f *Per coroll. p. 42. l. 1.*
g *Per prob. 1. ſchol. p. 47. l. 1.*

ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

LIBER TERTIVS.

PErfectiſſima inter planas figuræ proprietates fundamentales hoc libro demonſtrantur. Libri vtilitas vel hoc ſolo innoteſcit, quod tractet de circulo, rerum admirabilium per Matheſim vniuerſam fonte vberrimo. Theoremata illuſtriora ſunt 16.20.21.22. 31.32.35.36.

DEFINITIONES.

1. CIrculi æquales ſunt, quorum diametri ſeu ſemidiametri ſunt æquales.

2. Recta (F B) circulum tangere dicitur, quæ circulo ſic occurrit (in B) vt tamen producta circulum non ſecet. *Fig.* 20.*l.*3.

3. Circuli tangere ſe dicuntur, cum ſibi ſic occurrunt, vt tamen non ſecent. *Fig.*13.& 14.

4. In circulo æqualiter à centro (A) diſtare dicuntur rectæ (B C, F L) cum perpendiculares (A I, A O) quæ ex centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. *Fig.*18.

5. Segmenta, ſeu portiones circuli ſunt *Fig.* 37.

 partes,

partes, in quas circulum diuidit recta (C E) circulum ſecans.

Fig 33. 6. Angulus in ſegmento eſt (B Q C) qui continetur ſub rectis lineis, quæ ad vnum circumferentiæ punctum (Q) ex ſegmenti terminis (C, B) ducuntur.

Fig. 33. 7. Angulus (C Q B) inſiſtere dicitur peripheriæ (B O C) quæ illi opponitur.

Fig. 11. 8. Sector eſt pars circuli à duobus ſemidiametris (A B, A F) & arcu (B F vel B C F) quē ſemidiametri intercipiunt, cōprehenſa.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. lib. 3. *Dati circuli centrum inuenire.*

Ducatur in circulo recta B C vtcunque, quam biſeca in Q. Per Q duc perpendicularem L F. Hanc biſeca in A. Erit A centrum.

Si negas; centrum eſto O extra rectam F L (nam in F L eſſe non poterit, cum vbilibet extra A diuidatur inæqualiter) ducanturq; B O, Q O, C O. Quoniam igitur vis O centrum eſſe, erunt B O, C O æquales. Triangula igitur B O Q, C O Q ſibi mutuo æquilatera ſunt, cum etiam ex conſtr. B Q, & Q C, ſint pares, & Q O communis. Ergo *a* angulus O Q C æquatur angulo O Q B. Ergo O Q C *b* rectus eſt, ac proinde angulo L Q C per conſtr. recto æquatur, pars toti. Quod eſt abſurdum.

a Per 8. l. 1.

b Per defin. 14. l. 1.

Corol-

Corollarium.

EX demõſtratis patet, ſi in circulo recta (L F) aliam (B C) biſariam & perpendiculariter ſecat, in ſecante eſſe centrum.

Facillimè per normam inuenitur centrũ, vertice Q ad circumferentiã applicato. Si enim recta D E iungentem puncta, D & E, in quibus norma latera peripheriam ſecant, biſecetur in A, erit A centrum. Demonſtratio pendet ex 31. huius. *Fig. 2.*

PROPOSITIO II.

SI in circuli ambitu duo puncta ſumantur (B, C;) recta, quæ per illa ducitur; intra circulum cadit. *Fig. 2.*

Accipiatur in recta B C quoduis punctum O, & ex centro A ducantur A O, A B, A C. Quoniam A B, A C æquantur, etiam *a* anguli B & C æquales erunt. Quoniam igitur externus A O C *b* maior eſt interno B, maior erit quoque quam C. In triangulo igitur O A C, latus A C ſubtendens maiorem angulum A O C, maius eſt *c* latere AO ſubtendente minorem C. Cum igitur A C tantum pertingat ex centro ad circumferentiam, A O non pertinget. Ergo punctum O intra circulum cadet. Idem oſtendetur de quouis alio puncto rectæ BC. Tota ergo B C cadit intra circulum.

a *Per 5. l. 1.*
b *Per coroll. 1. p. 32. l. 1.*
c *Per 19. l. 1.*

Ex

Ex ipſa etiam notione lineæ rectæ, & circularis, propoſitio eſt manifeſta.

PROPOSITIO III.

Fig. 3.

SI in circulo recta per centrum ducta (B L) aliam (C F) non per centrum ductam ſecet bifariam, ſecabit quoque perpendiculariter. Et ſi ſecet perpendiculariter, ſecabit bifariam.

1. Pars. Ex A centro ducantur A C, A F. Triangula X, Z ſibi mutuo æquilatera ſunt, nam C O, F O, ex hypotheſi, & A C, A F, quia ex centro, æquales ſunt: A O verò communis eſt. Ergo *f* anguli A O C, A O F æquales. Ergo *i* recti. Quod erat primum.

f Per 8. *l*. 1.
i Per defin. 14. *l*. 1.

2. Pars. Quia ex hyp. anguli A O C, A O F ſunt recti, erit quad. A C *o* æquale quadratis A O, C O; & quad. A F æquale quadratis A O, F O. Cum igitur quadrata A C, A F æqualia ſint, etiam duo ſimul A O, C O duobus ſimul A O, F O æqualia erunt. Quare ablato vtrimque communi quadrato A O, remanent C O, F O æqualia. Ac proinde etiam rectæ C O, F O, ſunt æquales. Quod erat alterum.

o Per 47. *l*. 1.

PRO-

PROPOSITIO IV.

SI in circulo duæ rectæ (BC, FL) non ambæ per centrum ductæ, ſe ſecent, non ſecabunt ſe mutuo biſariam. Fig. 4. & 5.

Nam ſi vna L F tranſeat per centrum, patet hanc non biſecari ab altera B C, quæ ex hyp. per centrum A non tranſit. Fig. 5.

Si neutra per centrum tranſit, ex A centro duc A O. Si iam ambæ B C, F L forent biſectæ in O, anguli quoq; A O C, A O L eſſent a recti, ac proinde æquales, totum & pars quod fieri non poteſt. Fig 4. a Per prec.

PROPOSITIO V. & VI.

CIrculi ſe mutuo ſecantes, aut interius tangentes non habent idem centrum. Fig. 6. & 7.

Alias enim ductis ex communi centro A rectis A B, A C F, eſſent A C, A F, (pars & totum) æquales, quia ambæ ſunt æquales eidem A B.

PROPOSITIO VII.

SI in circulo quoduis aliud à cẽtro (A) accipiatur punctũ (C) ex quo rectæ Fig. 8.

plu-

plures C B, C L, C O, C F) in circumferentiam cadant.

1. Maxima erit (C B) quæ per centrum tranſit.

2. Reliqua diametri pars (C F) minima.

3. Aliarum verò maior eſt ea, quæ maximæ (C B) propior.

4. Neq; plures quàm duæ ex dicto puncto (C,) quod à centro diuerſũ eſt, ad circumferentiam duci poſſunt æquales.

Pars 1. Ducatur ex A centro recta A L. Quoniam A L, A B æquales ſunt, addita communi A C, erunt L A cum A C, & B C æquales: Sed L A, A C ſunt maiores *b* quam L C. Ergo etiam B C maior, quam L C. Eodẽ modo B C oſtendetur maior quauis aliâ.

b Per 20. l. 1

Pars 2. Ex centro duc A O rectam. A O, (hoc eſt A F) eſt minor *b* quàm A C, C O. Ablatâ igitur communi A C, remanet F C minor quam C O. Eodem modo erit C F minor, quauis aliâ.

b Per eand.

Pars 3. In triangulis C O A, C L A latera L A, A C æquantur lateribus O A, A C. Angulus vero L A C maior eſt angulo O A C. Ergo *c* baſis L C, maior baſi O C.

c Per 24. l. 1

Pars 4. Patet ex præcedentibus. Nam ſi tres duci poſſent æquales, C O, C I, C Q,

foren

forent duæ C Q, C I ad eandem partem inter ſe æquales. Quod repugnat parti 3.

PROPOSITIO VIII.

SI à puncto extra circulũ accepto (A) ad circulum ducantur plures rectæ (A B, A C, A F) (A O, A Q, A R) Fig. 9. & 10.

1. Earum quæ in cauam peripheriam incidunt, maxima eſt (A B) tranſiens per centrum (Z.)

2. Aliarum maior eſt ea, quæ maximæ (A B) propior.

3. Extra circulum minima eſt (A O) quæ producta per centrum tranſit.

4. Quæ minimæ propior, minor eſt remotiore.

5. Nõ plures quam duæ ex dicto puncto (A) in peripheriam duci poſſunt æquales, ſiue intra circulum, ſiue extra.

Pars 1. Ex centro Z, duc Z C. Quia æquantur Z C, Z B; additâ communi A Z, erunt A Z, Z C ipſi A B æquales. Sed A Z, Z C maiores ſunt a quam A C. Ergo etiam A B maior A C. Eodem modo erit A B maior quauis aliâ. Fig. 9. a Per 20. I. 1.

Pars 2. Duc Z F. Latera C Z, Z A æquantur lateribus F Z, Z A. Angulus vero

C Z A

b Per 24.l.1 C Z A maior eſt angulo F Z A. Ergo *b* baſis C A maior baſi F A.

Fig.10. Pars 3. Duc Z Q. Duæ A Q, Q Z maiores ſunt *c* quàm A Z. Ablatis igitur æqualibus Z Q, Z O remanet A O minor quàm A Q. Eodem modo A O minor erit quauis aliâ.

c Per 20.l.1

d Per 21.l.1. Pars 4. Duc Z R. Rectæ A Q & Q Z, minores ſunt *d* quam A R, R Z. Ablatis ergo æqualibus Z Q, Z R, remanet A Q minor quam A R.

Pars 5. patet ex quatuor præced.

PROPOSITIO IX.

Fig.11. *SI ab aliquo intra circulũ puncto (A) plures quàm duæ æquales ad ambitũ duci poſſint; Id punctum centrum erit.*

Patet ex 4. parte prop. 7.

PROPOSITIO X.

Fig.12. *CIrculi in duobus tantum punctis ſe mutuo ſecant.*

Secent enim ſi fieri poteſt in pluribus B, C, F. Ex A centro circuli L Q ducantur ad B, C, F, rectæ A B, A C, A F. Erunt hæ æquales. Quoniam ergo ex aliquo intra circulum O S puncto A ductæ ſunt tres æquales ad eius peripheriam, A B, A C, A F, erit A *ſ* centrum quoque circuli O S. Ergo circuli L Q & O S ſe ſecantes habent idem centrum, quod repugnat propoſitioni 5.

e Per præc.

PRO-

PROPOSITIO XI.

SI duo circuli ſe intus tangant; recta per eorum centra (*A, & I*) *ducta, tranſibit per contactum* (*B.*) *Fig.13.*

Si negas, habeant, ſi fieri poteſt, centra eum ſitum, vt recta per illa tranſiens, cadat extra contactum B, ſecans circulos in O, & L, ſintque centra ipſa A, & C; ac iunge AB, CB. Quoniam igitur CB, CO, æquantur, additâ communi AC, etiam AC, CB, æquales erunt AO. Sed *b* AC, CB ſunt maiores quàm AB; Hoc eſt *c* quam AL. Ergo etiam AO maior eſt quàm AL pars toto, Quod eſt abſurdum.

b *Per 20. l. 1*
c *Per defin. circuli.*

PROPOSITIO XII.

SI circuli ſe tangant exterius, recta coniungens centra, per contactum tranſibit. *Fig.14.*

Si negas, ſint ſi fieri poteſt centra ita poſita, puta in A & B, vt recta per ipſa tranſiens, per contactum S non incedat, ſed circulos ſecet in O, & Q. iunganturque AS, BS. Erunt igitur *a* AS, SB maiores quàm AB. Sed AS *b* eſt par AO, & BS par BQ. Ergo etiam AO, BQ ſunt maiores quàm tota AB, pars toto. Quod fieri non poteſt.

a *Per 20. l. 1*
b *Per defin. circuli.*

PRO-

Pars 2. Infra B F (ſi fieri poteſt) cadat R B tota extra circulum. Quoniam F B A rectus eſt per hyp. erit R B A acutus, ac proinde A B non eſt perpendicularis ad B R. Ducatur igitur ex A centro ad B R perpendicularis A O, quæ cadet [d] verſus R, & ſecabit circulum in Q. Igitur A B oppoſita maiori angulo, nempè A O B recto, maior eſt quam A O, quæ opponitur minori, nempe acuto O B A. Sed A B par eſt A Q. Ergo etiam A Q maior eſt quam AO, pars toto.

d Per coroll. 3. p. 32. l. 1.

Corollaria.

Fig. 20. 1. Hinc rurſum patet contactum rectæ lineæ & circularis eſſe punctualem.

Fig. 17. 2. Si centris in eadem lineâ rectâ in infinitum protractâ acceptis deſcribantur per B infiniti circuli tam minores primo BSC, quam maiores; omnes tangent, rectam I F in eodem vno puncto B.

3. Circuli igitur in amplitudinem quâcunq; datâ maiorem excreſcentes, propius ſemper ac propiùs in infinitum tangenti appropinquant, nunquam tamen ei præterquam in vnico contactus puncto, coniunguntur: quod quamuis euidentiſſimum ſit, eſt tamen reuera admirabile.

Fig. 17. 4. Ex his manifeſtum eſt, lineam quamcunque in infinitum eſſe diuiſibilem. Ducatur

catur enim ab aliquo diametri puncto ad tangentem recta A Q. Infiniti circuli centra habentes in rectâ B A ſine termino productâ rectam I F, per coroll. 2. hîc, & ſe mutuo per coroll. p. 13. tangunt in vno eodemq; puncto, B, ac proinde nuſquam vel inter ſe, vel cum recta I F, coniunguntur præterquam in B. Ergo neceſſe eſt vt rectam A Q dirimant in partes infinitas, hoc eſt in non tot quin plures.

5. Angulum contingentiæ ſeu contactus L B Q (eum nempe qui tangente & peripheriâ continetur) nulla recta linea poteſt diuidere. Fig. 16.

6. Per circumferentias tamen in eodem puncto tangentes ſecari poteſt ac minui in infinitum. Atque in hoc & tertio corollario latet totum myſterium aſymptoticum, hoc eſt lineæ rectæ ad Hyperbolam vnà ſecum in infinitum productam, accedentis ad interuallum quocunque dato minus, nunquam tamen concurrentis: quod præclarè obſeruauit & demonſtrauit Marius Bettinus noſter in Apiarijs, & ante illum Barocius atque Cardanus ex Rabbi Moyſe Narbonenſi, cuius demonſtrationem refert Cardanus de ſubtilitate lib. 16. Fig. 17.

Scholium.

Demonſtratur & ſoluitur fallacia paradoxorum, quæ ex angulo contactus deduci ſolent.

Atque hæc quidem ex 16. prop. hactenus deducta & vera & certa ſunt. Quæ verò deduci ex eadem ſolent præterea, omnem captum humanæ mentis excedunt. Quare ſuſpicari aliquando cœpi latere hic aliquid, cuius ignoratio ſubtilibus etiam ingenijs illuderet, & paradoxis illis immanibus aſſerendis anſam præberet. Et planè, quod ſuſpicatus ſum, ita ſe habere, mihi tandem videor deprehendiſſe. Paradoxa quæ ex 16. inferri ſolent ex alijs multis, hæc ferè præcipua ſunt.

Fig. 21. 1. *Angulus contingentiæ (O A C) omni acuto minor eſt. Acutus eſto B A C ab hoc auferri poteſt dimidius, & à reſiduo iterum dimidius, & ſic deinceps ſine termino. Quo pacto acutus fiet quocunque dato minor, quantumuis tamen in infinitum minuatur, ſemper tamen reſidui anguli, exempli gr. anguli Q A C, latus unum Q A a intra circulum cadet, ac proinde angulus contactus O A C intra acutum continebitur, eiuſque pars erit, ideoq; illo minor.*

a Per 16. l. 3.

2. *Angulus ſemicirculi, licet recto minor ſit, eſt omni acuto maior. Quia ob eandem cauſam, acutus quantumuis magnus B A Q, intra ſemicirculi angulum B A O comprehenditur.*

Hæc

Hæc duo in ipſo textu propoſitionis inferuntur. Quamuis nonnulli dubitent, Euclidis ea ſint, an ab aliquo adiecta. Appollonius certè, magnus geometra, cũ eandẽ affectionẽ in ellipſi, hyperbola & parabola demonſtrat, has illationes prætermittit.

3. Angulus rectus C A B (imò acutus quicumque C A Q) continet infinitos æquales angulos contactus: ac proinde infinities illo eſt maior. Nam angulus C A B diuidi poteſt in acutos infinitos minores ſemper & minores, quorum nihilominus ſinguli ſunt maiores b angulo contactus O A C. b Per paradox. 1.

4. Angulus contactus C A O eſt vera pars anguli recti C A B; eundem quippe una cum ſemicirculi angulo O A B conſtituit: nequit tamen ullâ ſui multiplicatione ſuum totum adæquare; ac proinde hic infinita æqualia ſibi addita non efficiunt infinitum.

5. Tranſitur à minori ad maius & per omnia media, neque tamen per æquale, ſiue datur maius aliquo, & datur eodem minus, neque tamen datur eidem æquale. Nam ſi recta A B, fixo manente puncto A, moueatur, donec congruat cum tangente, deſcribet acutos angulos B A P, B A Q, & omnes alios poſſibiles, qui quãuis ſemper augeantur, ſemper tamen erunt minores c ſemicirculi angulo B A O, quamprimum vero A B congruet tangenti C A, immediate habetur rectus C A B maior angulo ſemicirculi. c Per paradox. 2.

Hæc & plura alia ex hac 16. propoſitione deduci ſolent; quæ profectò ſi ita, ut proponuntur, ſeſe

habeant, merito incomprehenſibilia videri poſſet. Peletarius, vt his paradoxis ſe expediat, negat angulum contactus eſſe quantum. Rem confecerat, ſi dixiſſet nullum angulum eſſe quantum. Sed is vehementer errat, cùm inde infert omnes ſemicirculi angulos eſſe æquales, quod planè non inferret, ſi intelligeret quod de contactûs angulo aſſeruerat, omnibus angulis conuenire. Neque tamen Clauio noſtro in ſua illa aduerſus Peletarium apologeticâ diſputatione aſſentior. Meâ quidē ſententiâ vterque fallitur, hic dum omnes omnino angulos eſſe putat quantitatem, ille dum omnes præter angulum contingentiæ. Alij ſe exiſtimant hâc vna reſponſione omnes difficultates ſoluere, ſi dicant, curuilineos angulos & rectilineos eſſe incōparabiles. Rogati verò, cur ſint incomparabiles, reſpondent, quia angulus contactus quantumcumq; multiplicatus nunquā poteſt æquare rectum vel acutum.

Atqui hoc eſt paradoxum omnium maximum, cuius explicatio petebatur, quî nimirū fieri poſſit, vt angulus contactus anguli recti pars ſit, & tamen quotieſcumq; multiplicatus eundem ſuperare nequeat, reſpondent angulum contactus non eſſe partem recti, quia eum non poteſt adæquare. At paradoxorum aſſertores replicant hinc ſolum ſequi non eſſe partem recti aliquotam: veram tamen eſſe partem, eo quod cum ſemicirculi angulo rectum componat. Vnde qui hac via difficultates propoſitas volebant diſſoluere, debuerant oſtendere angulū contactus nullo ſenſu partem eſſe rectilinei

anguli,

anguli, neq; addito ſibi ſemicirculi angulo rectum componere: id quod facturi deinceps nos ſumus.

Mihi videtur res omnis ex Euclidæâ definitione anguli pendere. Hæc enim, ſi penitius expendatur, manifeſtè docet nullum angulum eſſe quantum, quo vno errore ſublato, paradoxa omnia euaneſcunt. Sentio igitur Def. 8. l. 1.

1. Nullus angulus eſt quantitas, ſed modus quantitatis. Sic enim habet definitio 8. l. 1. Angulus planus eſt duarum linearum &c. alterius ad alteram inclinatio. Atqui linearum inclinatio non eſt quantitas, ſed modus quantitatis, cũ enim curuitas non ſit quantitas, cur inclinatio ſit, quæ ab illa non magis differt, quã inflexio & fractio. Deinde. Si angulus eſſet quantus, foret vel linea, vel ſuperficies, vel corpus. Non eſſe lineam aut corpus patet. Sed neq; ſuperficies eſt, ea enim ablatione partium C, B, minuitur, non angulus. Neq; poteſt dici angulum eſſe ſuperficiem indeterminatam, cum angulus quilibet determinatus ſit. Fig. 22.

2. Quoniam anguli non ſunt quantitas, ſed modus quanti, eorum inter ſe comparatorum relatio non eſt æqualitas & inæqualitas, ſed ſimilitudo & diſſimilitudo.

3. Cum igitur anguli inter ſe comparati æquales dicuntur aut inæquales, non aliud intelligi poteſt, quàm eos ſimiles eſſe inter ſe aut diſſimiles. Maluit tamen Euclides æquales & inæquales dicere ob multas horum terminorũ in angulis rectilineis commoditates. Quem proinde loquendi modum

dum etiam nos retinebimus.

4. *Similes porro anguli ſunt, quorum ambo latera ſuperimpoſita congruunt. Diſſimiles quorum non congruunt latera. Angulus enim nihil eſt aliud, quam inclinatio linearum, alterius ad alteram. Ergo ſimiles anguli ſunt inclinationes linearum ſimiles. Non ſunt autem inclinationes linearum ſimiles, niſi ambæ ſibi mutuo impoſitæ congruant. Ergo ſimiles anguli ſunt, quorũ congruunt latera, diſſimiles, quorum non congruunt.*

5. *Itaque manifeſtum eſt nullum angulum curuilineum æqualem dari poſſe ulli angulo rectilineo. Nam æqualitas angulorum non aliud eſt quam ſimilitudo, per concluſ. 2 & 3. Similitudo angulorum eſt ſola laterum congruentia per concluſion. 4. Laterum congruentia haberi nequit, ſi angulus curuilineus imponitur rectilineo. Ergo &c. Errat igitur Proclus dum deſcriptis æqualibus ſemicirculis ita ratiocinatur: æqualium ſemicirculorum anguli E A D, C A B æquales ſunt. Ergo*

Fig. 23. *ſi his addatur communis angulus C A D, erit angulus E A C curuilineus æqualis rectilineo D A B. Falliturne ergo axioma, ſi æqualibus addas, vel demas æqualia, tota, vel reliqua erunt æqualia? Nequaquam: hoc enim ad res quantas ſolum pertinet, anguli porro quanti non ſunt. Axioma ut in angulis valeat ita formari ac intelligi debet. Similes anguli, ſi apponantur ſimilibus angulis, ſimiliterq́ poſitis; qui tũ orientur, erunt ſimiles. At Proclus cõparat angulos ſimiles quidẽ: ſed communis,*

qui

qui vtriſque additur, cum ab vnâ parte habeat ductus rectum: ab altera curuum, diſſimiliter vtriſque additur.

6. Quare cum tota eſſentia anguli ſit linearum ſe tangentium inclinatio, non erit vnus angulus pars alterius, vna ſiquidem inclinatio pars alterius inclinationis non eſt: neq; angulus auferri ab angulo poterit; inclinatio ſiquidem vna auferri nequit ab altera, &c. Hæc enim non laterum inclinationibus, quæ quantitas non ſunt, ſed ſuperficiebus inter latera conſtitutis conueniunt.

7. Poſtremo ex iam dictis colligemus, quomodo intelligi debeant, illæ locutionum formæ, quibus geometræ paſſim, atq; ipſe inprimis Euclides, vtũtur, cum angulos ſecari, augeri, imminui, alterum alterius duplum, triplum, aliaq; ſimilia aſſerunt. Hæc ſanè exiſtimabimus eos non propriè, ſed analogicè tantùm angulis tribuere; itaque eos loqui voluiſſe, quod id commodiùs, & expeditiùs eſſet, neq; tamen obnoxium periculo, modo in angulis rectilineis maneatur. Angulum itaq; diuidi Fig. 24. rectâ D A, non aliud erit, quàm inter latera E A, C A aliam interponi lineam, quæ nouas duas cum vtroq; latere inclinationes, hoc eſt duos nouos angulos efficiat. Angulum vero E A C eſſe duplum anguli E A D, nihil rurſum aliud erit, quã inter lineas rectas E A, C A, aliam interponi, quæ ad vtramque ſimiliter inclinetur, vnde fiat vt rectæ E A, D A rectis C A, D A, inclinationibus nõ mutatis, impoſitæ congruant. Quod ſi ita ratiocinetur Fig. 24. & 25.

(An-

Angulus EAD eſt æqualis angulo ILQ. & DAC eſt æqualis QLR. Ergo totus EAC toti ILR æqualis eſt. Idem erit, ac ſi dicatur; inclinatio rectarum EAD ſimilis, ſeu eadem eſt inclinationi rectarum ILQ: & inclinatio rectarum DAC ſimilis eſt inclinationi rectarum QLR. Ergo etiã inclinatio rectarum EAC ſimilis erit inclinationi rectarum ILR vel certè (quod recidet in idem, ex aſſertione 4. ſupra) collectionem illã ſic intellige; latera EAD congruunt lateribus ILQ; & latera DAC congruunt lateribus QLR Ergo latera quoque EAC congruent lateribus ILR. Quæ quidem conſecutio æquè clara eſt, atque ſi æqualibus addas æqualia, tota æqualia eſſe. Ad eum modum locutiones cæteras, quæ, cum ſint quanti propriæ, ad angulos transferuntur, facilè, veritate theorematum vbique ſaluâ, interpretabimur.

His ita conſtitutis, facilè paradoxa angularia diſſoluemus; quæ ſanè non aliunde enata ſunt, quã quod angulos eodem, quo cæteras quantitates, habuerint loco, vt igitur ſimul omnia expediam, Dico paradoxa illa, ſi in proprio verborum ſenſu accipiantur, ad vnum omnia eſſe falſa. Sic enim accepta non conueniunt niſi quanto: anguli autem quanti non ſunt, vt iam oſtendimus.

Itaq; angulus contactus neq; minor eſt quouis acuto, neque pars eſt anguli rectilinei, neque in rectilineo continetur infinities, imò ne ſemel quidem: nihil enim horum linearum inclinationi poteſt competere, quæ tota anguli eſſentia eſt. Si verò

non

non propriè, ſed analogicè accipientur, iam nihil continent, quod à communi ſenſu, ac ratione alienum ſit. Sic enim angulum contactus O A C eſſe minorem quouis acuto, & ſemicirculi angulum O A B acuto omni maiorē, non aliud ſignificabit, quam infra tangentē C A, nullam poſſe duci rectā ad contactum, quin ſecet peripheriam. Quæ quidē circuli proprietas eſt omnino digna, quam homines admirentur, eſt tamen eiuſmodi quam poſſimus intelligere, & quæ nihil cum ratione pugnans inuoluat. Non alius paradoxi tertij, quarti & quinti ſenſus erit. Atque ita vnius Euclidææ definitionis ductu, ritè perſpectâ naturâ anguli, omnes immanium paradoxorum tenebræ euaneſcunt. Fig. 25.

PROPOSITIO XVII.

A Puncto dato (B) rectā ducere, quæ datum circulum (O Q) tangat. Fig. 26.

Ex A dati circuli centro ducatur ad datum punctum B recta A B, ſecans peripheriam in O. Centro A deſcribe per B alium circulum, B S, & ex O duc O C perpendicularem ad A B, quæ occurrat circulo B S in C. Duc C A, occurrentem circulo O Q in I. Ex B ad I ducta recta tanget circulum O Q.

Quia latera B A, I A, æquantur lateribus C A, O A, angulusque A communis eſt in trigonis I A B, O A C, etiā [a] anguli A O C, A I B a Per 4. l. 1.

b Per conſtr. A I B æquales ſunt. Sed b A O C rectus eſt.
c Per 16. l. 3. Ergo etiam rectus eſt A I B. Ergo B I c tangit in I.

Scholium.

Fig. 27. *EX 31. ſequ. pulchrè ex dato puncto (O) ducitur tangens circulum datum (B Q.)*

Centrum A & datum punctum O iungens recta biſecetur in P. Tum centro P, per A & O deſcribe circulum occurrentem dato in B. Recta O B tanget.

Nam iuncta A B, angulus A B O in ſemicirculo rectus eſt per 31; ergo per 16. O B tangit circulum B Q.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 28. *SI circulū tangat recta linea (C L,) quæ ex centro (A) ad contactum (B) ducitur, tangenti perpendicularis eſt.*

Si negas, ſit ex A centro perpendicularis,
a Per 1. part. p. 16. l. 3. alia quædam recta A F: a ſecabit ea circulum in O. Quia ergo angulus A F B rectus
b Per coroll. 5. p. 32. l. 1. ponitur, erit b A B F acutus. Ergo A B,
c Per 19. l. 1. (hoc eſt A O) maior c quam A F, pars toto.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

SI recta (B C) circulũ tangat, & ex contactu (A) tangenti perpendicularis excitetur (A I) erit in ea centrum. Fig. 29.

Si negas, ſit centrum extra A I in Z, & ab eo ad contactum ducatur Z A. erit [d] angulus Z A C rectus, ac proinde par angulo I A C, per hypoth. recto; hoc eſt pars toti. d Per præc.

PROPOSITIO XX.

ANgulus ad centrum (B A C) duplus eſt anguli (B F C) ad peripheriam, cum idem arcus (B C) eſt baſis angulorum. Fig. 30. 31. 32.

Triplex eſt caſus. In primo latera B A, B F coincidunt. Tum vero quia A F, A C ex centro ductæ æquantur, erunt in triangulo Z anguli F, & C [a] æquales. Sed B A C [b] æqualis eſt duobus F & C. Ergo B A C duplus eſt vnius F. Fig. 30. a Per 5. l. 1. b Per 32. l. 1.

In caſu ſecundo B A, C A cadunt intra B F, C F. Tum vero ductâ F A X, per caſum primum X A B eſt duplus X F B, & X A C duplus X F C. Ergo totus B A C duplus eſt totius B F C. Fig. 31.

In tertio caſu B F ſecat A C, & anguli Fig. 32.

B A C,

B A C, B F C ſunt extra inuicem. Ducatur F A L per caſum 1, totus L A C duplus eſt totius L F C, & ablatus L A B duplus eſt ablati L F B. Ergo & reliquus B A C duplus eſt reliqui B F C. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 33. *ANguli (B Q C, B F C,) qui in circulo, inſiſtunt eidem arcui (B O C,) ſiue qui in eodem ſegmento (B Q S C) exiſtunt, inter ſe omnes ſunt æquales.*

Sit primò ſegmentum B Q S C maius ſemicirculo. Ex centro A duc A B, A C. Per præced. angulus B A C ad centrum, duplus eſt ſingulorum B Q C, B F C. Ergo omnes B Q C, B F C ſunt *a* æquales. Quod erat demonſtrandum.

a Per axio. 6

Fig. 34. Sit deinde ſegmentum B Q C æquale aut minus ſemicirculo. In triangulis B Q I & C F I quia anguli ad verticem I oppoſiti, *b* æquales ſunt, etiam ſumma reliquorum Q & R ſummæ reliquorum F & O *c* æqualis erit. Quare ſi ab his æqualibus ſummis auferantur anguli R & O qui per primam partem æquales ſunt, vtpote eidem arcui Q F inſiſtentes, qui remanent Q, F, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

b Per 15. l. 1.
c Per coroll. 10. p. 32. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Quadrilateri circulo inſcripti (A B C F) oppoſiti anguli duos rectos conficiunt. *Fig. 35.*

Ducantur B F, C A. Angulus A B C, cũ duobus O & X, facit *a* duos rectos. Sed O eſt *b* æqualis I, quia inſiſtunt eidem arcui B C; & X *c* eſt æqualis Z, quia inſiſtunt eidem arcui A B. Ergo A B C, cum duobus etiam, I, Z, hoc eſt cum toto oppoſito angulo A F C, facit duos rectos. Quod erat demonſtrandum.

a *Per 32. l. 1.*
b *Per 21. l. 3*
c *Per eand.*

PROPOSITIONES XXIII. XXIV.

Non ſunt neceſſariæ: & agitur de ſegmentis ſimilibus, quæ non poſſunt ſine proportionibus rectè definiri.

PROPOSITIO XXV.

Datum arcum (A B C) perficere.

Subtendantur vtcunque duæ rectæ A B, C B, quas biſeca in I, & L. Ex I, & L duc perpendiculares ſibi occurrentes in puncto O. Hoc erit centrum circuli, cuius portio eſt arcus A B C. *Fig. 36.*

G Nam

b *Per corol. p.1.l.3.* Nam *b* centrum eſt & in recta I X, & in recta L Z. Ergo in cõmuni ipſis puncto O.

Fig.36. *Praxis. Centro B ſumpto in arcu, deſcribe circulum, eodemq́; interuallo, alijs in arcu centris, deſcribe duos alios circulos quorum ſinguli priorem bis ſecent. Per interſectiones ductæ rectæ ſibi mutuo occurrentes in O dabunt centrum.*

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

Fig.37. *IN circulis æqualibus rectæ æquales (C E, F I) ſubtendunt arcus æquales; & ſi arcus ſunt æquales, etiam ſubtenſæ æquales erunt.*

1. Pars. Ad centra A & B ducantur C A, E A, F B, I B. Quia triangula C A E, F B I, ſibi mutuo æquilatera ſunt, etiam

a *Per 8. l.1.* erunt ſibi mutuo *a* æquiangula. Ergo cum circuli ſibi mutuo imponentur, triangulum F B I congruere poterit triangulo C A E, ac proinde centrum B incidet in centrum A, & puncta F, I, in puncta C, E. Cum igitur circuli ſint æquales, etiam arcus F L I neceſſariò congruet arcui C Q E, & arcus F O I arcui C S E, ac proinde æquales

b *Per axio. 7.* *b* erunt etiam ipſi.

Pars 2. Quoniam circulorum æqualium, arcus F L I, C Q E ponuntur æquales, ſibi mu-

mutuò impoſiti congruent, punctaque F, I incident in puncta C, E. Ergo & ſubtenſa F I congruet ſubtenſæ C E. Ergo F I, C E [d] æquales ſunt.

d Per axio. 7.

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

SI in circulis æqualibus anguli ſiue ad centra (B A C, F L I) ſiue ad ambitum (B O C, F S I) ſint æquales, etiã arcus (B X C, F Z I) quibus inſiſtunt, ſunt æquales: & ſi arcus ſunt æquales, etiam anguli æquales erunt.

Fig. 38.

Pars 1. Quoniam latera A B, A C, æquantur L F, L I, (ſunt enim æqualium circulorum ſemidiametri) & anguli A, L ponuntur æquales; erunt baſes [a] B C, F I æquales. Ergo arcus B X C, F Z I etiam [b] æquales ſunt.

a Per 4. l. 1.

b Per præc.

Ponantur iam anguli B O C, F S I ad ambitum æquales. Quia igitur [c] horum dupli ſunt B A C, F L I, etiam illi æquales erunt, ac proinde, vt iam oſtenſum eſt, etiam arcus B X C, F Z I ſunt æquales.

c Per 20. l. 3.

Pars 2. Ex æqualitate arcuum B X C, F Z I habetur per 27. æqualitas ſubtenſarum B C, F I. Ergo, quia etiam B A, A C, æquantur ipſis F L, L I, erunt [e] anguli A & L, ad centrum æquales: & quia [i] anguli O

e Per 8. l. 1.

i Per 20. l. 3.

& S horum dimidij ſunt, erunt etiam ipſi æquales.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 39. *Datum arcum (A B C) biſecare.*

Duc A C, quam biſeca in O. Ex O perpendicularem duc O B, occurrentem arcui in B. Dico factum.

Iungantur enim A B, C B. Latera A O, O B per conſtr. æquantur lateribus, C O, O B, & anguli ad O ſunt æquales, quia recti. Ergo baſes A B, B C a æquales. Ergo etiam b æquantur arcus A B, C B.

a Per 4. l. 1.
b Per 26. l. 3

Fig. 39. *Praxis. Centris A & C deſcribe pari intervallo arcus ſe ſecantes in punctis F, & I, per quæ ducta recta arcum A B C biſecabit.*

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 40. *Angulus (B C F) in ſemicirculo, rectus eſt: in ſegmento maiore minor recto; in ſegmento minore recto maior.*

1. Pars. Ex centro A duc A C. Quia æquales ſunt A B, A C, anguli, O, B, a æquales erunt. Ob eandem cauſam æquales erunt I, F. Ergo totus B C F vtrique B, & F, æqualis eſt. Cum igitur b tres ſimul conficiant duos rectos, ſemiſſis trium, angulus B C F, vnus rectus eſt.

a Per 5. l. 1.
b Per 32. l. 1.

2. Pars.

2. Pars. Sit ſegmentum L O B F ſemicirculo L O B maius, in eoque F O L angulus, & ducatur O B. Angulus F O L minor eſt angulo B O L, qui per 1. partem rectus eſt. Ergo &c. Fig. 41.

3. Pars. Eſto ſegmentum L O X ſemicirculo L O B minus, in eoque angulus X O L. Erit hic maior quàm B O L, qui rectus eſt. Ergo &c. Fig. 41.

PROPOSITIO XXXII.

SI recta (C F) circulum tangat, & alia ex contactu ducta (A B) eandem ſecet, erit angulus à tangente & ſecante factus, par angulo, qui fit in ſegmento alterno. Fig. 42. & 43.

Nimirum angulus C A B erit par angulo L, qui fit in ſegmento A L Q B, & angulus F A B par angulo Q, qui fit in ſegmento A Q B.

Tranſeat primò ſecans A B per centrum. Per 18. C A B, rectus eſt. Et per 31 rectus eſt L. Ergo C A B & L æquales ſunt. Fig. 42.

Tranſeat deinde ſecans A B non per centrum. Ducatur igitur per centrum recta A Q, & iungatur B Q. Quia A B Q in ſemicirculo rectus eſt, faciet B Q A cũ B A Q [a] rectum vnum. Sed etiam C A Q rectus [b] eſt. Ergo B Q A, cum B A Q æquatur Fig. 43.

a Per 32 l. 1.
b Per 18. l. 3.

 C A Q.

CAQ. Ablato igitur communi BA c erit BQA (hoc eſt L) æqualis CA. Quod erat primum.

c Per 21. l. 3.

Deinde, d FAB, CAB, faciunt duos rectos; & in quadrilatero BOAL e oppoſiti L, & O etiam faciunt duos rectos. Ergo duo FAB, CAB æquantur duobus ſimul O & L. Ablatis ergo hinc quidem CAB, inde L, quos iam oſtendi æquales, erunt æquales reliqui FAB, & O. Quod erat alterum.

d Per 13. l. 1.
e Per 22. l. 3.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 44.

SVper data recta (BC) ſegmentum circuli conſtruere, capiens angulum dato parem.

Si detur angulus acutus ABF, ex B duc BL perpendicularem ad AB, & ad terminum C datæ rectæ BC, fac angulo CBL parem a BCI, cuius latus ſecabit BL, in I. Centro I, per B, deſcribe circulum, hic trãſibit per C (quia ob æqualitatem angulorũ ad C & B etiam latera CI, BI b æqualia ſunt) capietque ſegmentum BQC angulum parem dato ABF.

a Per 23. l. 1.
b Per 5. l. 1.

Nam quia AB diametro BL perpendicularis eſt, AB tanget d circulum, quem ſecat BC. Ergo e angulus in ſegmẽto BQC, æquatur angulo ABF.

d Per 18. l. 3.
e Per prac.

Quod

c Per 21. l. 3. CAQ. Ablato igitur communi BAQ, erit BQA (hoc ᶜ eſt L) æqualis CAB. Quod erat primum.

d Per 13. l. 1. e Per 22. l. 3. Deinde, ᵈ FAB, CAB, faciunt duos rectos; & in quadrilatero BOAL ᵉ oppoſiti L, & O etiam faciunt duos rectos. Ergo duo FAB, CAB æquantur duobus ſimul O & L. Ablatis ergo hinc quidem CAB, inde L, quos iam oſtendi æquales, erunt æquales reliqui FAB, & O. Quod erat alterum.

PROPOSITIO XXXIII.

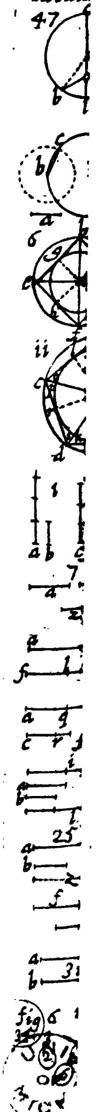
Fig. 44. *SVper data recta (BC) ſegmentum circuli conſtruere, capiens angulum dato parem.*

a Per 23. l. 1. Si detur angulus acutus ABF, ex B duc BL perpendicularem ad AB, & ad terminum C datæ rectæ BC, fac angulo CBL parem ᵃ BCI, cuius latus ſecabit BL, in I. Centro I, per B, deſcribe circulum, hic trãſibit per C (quia ob æqualitatem angulorũ ad C & B etiam latera CI, BI ᵇ æqualia ſunt) capietque ſegmentum BQC angulum parem dato ABF. b Per 5. l. 1.

d Per 18. l. 3. e Per prec. Nam quia AB diametro BL perpendicularis eſt, AB tanget ᵈ circulum, quem ſecat BC. Ergo ᵉ angulus in ſegmẽto BQC, æquatur angulo ABF.

Quod

Tabula



Quod ſi detur angulus obtuſus R B C, eadem conſtrue, eritq; ſegmentum C O B quæſitum.

PROPOSITIO XXXIV.

A Dato circulo ſegmentum auferre capiens angulum dato parem. Fig. 45.

Ad circuli diametrum F A duc perpendicularem B A L; ducatur item A C, *f* quæ faciat angulum B A C parem dato. Hæc auferet ſegmentum A Q C capiens angulum parem dato; vti patet ex 32. f Per 23. l.

PROPOSITIO XXXV.

SI in circulo duæ rectæ (C L, B F) ſe ſecuerint, rectangulum (C O L) ſub ſegmentis vnius æquale eſt rectangulo (B O F) ſub ſegmentis alterius comprehenſo. Fig. 46. 48.

Si ſe interſecant in centro A, res patet.

Si vna C L tranſit per centrum A, & reliquam B F ſecat bifariam; ſecabit quoque *a* perpendiculariter, ac proinde quad. F O eſt rectangulum F O B. Ducatur A F; Quoniam C L biſecta eſt in A, & aliter in O, erit Fig. 46. a Per 3 l.

{ rect. C O L. ∓. *b* quad. A L; hoc eſt b Per 5. l.
{ quad. A O.

c Per 47. l. 1 quad. A F; hoc eſt c { quad. A O / quad. F O }

Dempto igitur communi quadrato A O, erit rect. C O L. æ. quad. F O; hoc eſt rect. F O B.

Fig. 47. Si vna, C L, per centrum tranſit, & reliquam B F ſecat inæqualiter in O, ex centro A ducta recta ſecet ipſam B F in I bifariã.

d Per 3. l. 3. Igitur angulus A I B d rectus erit. Iam quia C L biſecta eſt in A & aliter in O, erit

e Per 5. l. 2. { rectang. C O L, / cum quad. A O } æ. e quad. A L; hoc eſt

f Per 47. l. 1 quad. A B; hoc eſt f { quad. A I / quad. B I }

g Per eand. Sed quadratum A O æquatur g quadratis O I, A I. Ergo

{ rectang. C O L. / quad. O I / quad. A I } æ. { quad. A I, / quad. B I. }

Dempto igitur communi quadrato A I, remanent

{ rect. C O L. / quad. O I } æ. quad. B I

Atqui etiam quadratũ B I æquatur rectangulo i F O B cum quadrato O I, quia F B

i Per 5. l. 2. ſecta eſt bifariam in I & aliter in O. Ergo

{ rectang. C O L. / quad. O I } æ. { rect. F O B / quad. O I. }

Dempto

Dempto igitur cõmuni quadrato, O I, erit
rect. C O L. Æ. rect. F O B.

Quod ſi neutra rectarum C L, F B per centrum tranſeat, per communem earum ſectionem O per centrum A, ducatur recta X Z. Per modo demonſtrata tam rectang. C O L quam rectang. F O B æquantur rectangulo Z O X. Ergo etiã C O L, F O B æqualia ſunt inter ſe. Fig. 48.

PROPOSITIO XXXVI.

SI à puncto (B) extra circulum dato ducantur duæ rectæ, vna tangens (B F) altera ſecans (B C;) erit rectangulum (C B O) ſub tota ſecante (C B) & parte (B O) inter punctũ & circulum interiectã cõprehenſum, æquale quadrato tangentis (B F.) Fig. 49. 50. 51.

Si ſecans B C tranſit per centrũ A, iunge A F, faciet hæc a cum F B angulum rectum. Quoniam C O biſecta eſt in A, eique adiecta O B, erit Fig. 49. a Per 18. l. 3.

rect. C B O, b Æ. quad. A B hoc eſt c quad. A O b Per 6. l. 2.
quad. B F. c Per 47. l. 1
quad. A F

Ablatis ergo quadratis A O, A F, æqualibus, remanet

rect. C B O. Æ. quad. B F.

Quod

Fig. 50. 51. Quod ſi C B non tranſit per centrum A, ducantur A B, A F, A O, & A L ex centro ducta biſecet O C in L. Ergo angulus A L O *d* rectus erit. Item A F B *e* erit rectus. Quoniam vero C O biſecta eſt in L, eique adiecta eſt O B, erit

d Per 3. l. 3.
e Per 18. l. 3.
f Per 6. l. 2.

{ rect. C B O. } æ. *f* quad. L B.
{ quad. L O }

Addatur vtrimque quadratum A L, erit

{ rect. C B O. } æ. { quad. L B }
{ quad. L O } { quad. A L }
{ quad. A L }

Sed quadrata L O, A L æquantur quadrato *g* A O ſeu A F; & quadrata L B, A L *i* æquantur quadrato A B. Ergo

g Per 47. l. 1.
i Per eand.
k Per eand.

{ rect. C B O. } æ. quad. A B; hoc eſt *k*
{ quad. A F }

{ quad. B F }
{ quad. A F. }

Ablato igitur communi quadrato A F, remanet

rect. C B O. æ. quad. B F.

Corollaria.

Fig. 52. 1. SI ab eodem extra circulum puncto B, quotuis ducantur ſecantes B C, omnia rectangula C B O, inter ſe æqualia ſunt. Singula enim æquantur quadrato tangentis B F.

2. Quæ

2. Quæ ex eodem puncto circulum tangunt, B F, B Q æquales ſunt. Earum quippe quadrata æquantur ſingula eidem rectangulo C B O.

PROPOSITIO XXXVII.

SI rectangulum ſub C B & O B ſit æquale quadrato B F, hæc circulum tanget in F. Fig. 51.

Ex B ducatur tangens B Q, & ex E centro ductis ad Q & F rectis E Q, E F, iungatur B E. Quoniam rectangulo C B O æquantur quadratum B F per hyp. & quadratum B Q per 36. hæc inter ſe æqualia ſunt, adeoque & rectæ B Q, B F æquales. Igitur triangula F E B, Q E B ſibi mutuo ſunt æquilatera. Ergo *b* anguli Q F, æquales erunt. Sed Q *c* rectus eſt. Ergo etiam F rectus eſt. Ergo B F *d* tangit.

b Per 8. l. 1.
c Per 18. l. 3.
d Per 16. l. 3.

ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

LIBER IV.

HIc liber totus problematicus eſt, docet, quo artificio figuræ præſertim ordinatæ circulo inſcribantur & conſcribantur. Ampliſſimus eſt illius uſus in munitionibus extruendis: & ex illo quaſi fonte eximiæ illæ ſinuum, tangentium, & ſecantium tabulæ ingenti bono Matheſeos fluxêre.

DEFINITIONES.

1. Figura rectilinea circulo inſcripta eſt, vel circulus figuræ circumſcriptus, cum ſingulorum angulorum vertices in circumferentia exiſtunt.

2. Figura rectilinea circulo circumſcripta eſt, vel circulus figuræ inſcriptus eſt, cum ſingula latera circulum tangunt.

3. Figura ordinata ſeu regularis eſt, quæ æquilatera & æquiangula eſt.

PRO-

PROPOSITIO PRIMA.

Circulo (B D) rectam datam (A) diametro non maiorem, inſcribere. *Fig. 1. l. 4.*

Accipe in peripheria quoduis punctum B. Centro B interuallo datæ A deſcribe arcum circulo occurrentem in C. Duc rectam B C. Dico factum.

PROPOSITIO II.

Circulo triangulum inſcribere dato (X) æquiangulum. *Fig. 2.*

Circulum tangat E F in D. Fiat angulus E D G par *o* angulo C, & F D H par B: iungaturque G H. Dico factum. Nam angulus H, æquatur *a* angulo E D G: hoc eſt *b* angulo C; & G æquatur *c* F D H; hoc eſt *d* ipſi B. Ergo etiam G D H *f* æquatur A. Factum eſt igitur quod petebatur.

o *Per 23. l. 1.*
a *Per 32. l. 3.*
b *Per conſtr.*
c *Per 32. l. 3.*
d *Per conſtr.*
f *Per corol. 9. p. 32. l. 1.*

PROPOSITIO III.

Circulo circumſcribere triangulum æquiangulum dato I L K. *Fig. 3.*

Latus I K vtrimque producatur, vt fiant externi anguli O, & N. Fac in centro A per 23. l. 1. angulos G A B, B A F pares angulis O, N. Deinde in punctis G, B, F circulum tangant

tangant tres rectæ coeuntes in C, E, D. Triangulum C D E eſt circulo circumſcriptum & æquiangulum dato I L K.

In quadrilatero C G A B, anguli G & B ſunt duo *a* recti. Ergo reliqui G A B, & C conficiunt ſimul etiam duos *b* rectos, ac proinde æquantur duobus ſimul O, I. Ablatis igitur G A B, & O æqualibus per conſtr. remanent æquales C, & I. Eodem modo oſtenditur E æqualis eſſe K. Ergo D & L *c* etiam æquales erunt. Factum eſt igitur quod petebatur.

a Per 18 l. 3
b Per theor. 2. ſchol. poſt 32. l. 1.
c Per corol. 9 p. 32. l. 1.

Quod autem tangentes concurrant, ſic oſtenditur. Anguli O, I, & K, N ſunt æquales *e* 4. rectis, & I, K ſunt minores duobus *f* rectis. Ergo O, N, (hoc eſt per conſtruct. G A B & B A F) ſunt maiores duobus rectis: Ergo G A F eſt minor duobus *g* rectis. Ergo recta G F cadit inter A & D. Ergo cum A G D, A F D ſint recti, erunt D G F, D F G duobus rectis minores. Ergo *i* C G D, E F D concurrunt verſus D. Simili ratione demonſtrabis concurrere reliquas.

e Per 13 l. 1.
f Per 32. l. 1.
g Per corol. 8. p. 13. l. 1.
i Per ſchol. poſt 31. l. 1.

PROPOSITIO IV.

Fig. 20.

TRiangulo circulum inſcribere.

Duos angulos C & E biſeca rectis C A, E A coeuntibus in A. Ex A duc perpendiculares A B, A G, A F. Circulus centro

tro A, per B deſcriptus, tranſibit etiam per G & F, tangetque tria latera trianguli.

In triangulis enim C A G, & C A B, quia anguli A G C, A B C, itemq; G C A, B C A per conſt. æquantur, & latus quoque A C eſt commune, etiam A G, A B a æqualia erunt. Pari modo oſtendam paria eſſe A B, A F. Circulus ergo deſcriptus centro A tranſit per A, G, F: & quia anguli ad B, G, F ſunt recti, tangit b omnia trianguli latera. Fecimus ergo quod petebatur.

a Per 26. l. 1.

b Per 16. l. 3.

PROPOSITIO V.

Triangulo circulum circumſcribere: ſiue per tria data puncta (B, C, D) non ad vnam rectam poſita, circulum deſcribere.

Fig. 4.

Puncta data B, C, D, binis rectis B C, C D connecte, quas biſeca perpendicularibus O A, E A cocurrentibus in A. Hoc erit centrum circuli per B, C, D tranſeuntis.

Ductæ intelligantur rectæ A C, A D, A B. per conſtr. latera D O, A O æquantur lateribus C O, O A, & anguli ad O ſunt recti. Ergo A D a æquatur A C. Eodem modo A B æquatur A C. Ergo etiam A D, A B b æquales. Ergo circulus centro A deſcriptus per B, tranſibit etiam per C & D. Quod petebatur.

a Per 4. l. 1.

b Per axio. 1.

Ad

Ad praxim tantum opus centris B, C, D, deſcribere tres æquales circulos ſe mutuo interſecantes, & per interſectiones ducere rectas, hæ ſibi occurrentes dabunt centrum quæſitum.

PROPOSITIO VI. & VII.

Fig. 5.

Circulo quadratum inſcribere, & circumſcribere.

Ducantur diametri B D, C E ſe mutuo ſecantes perpendiculariter; rectæ, quæ harum terminos iungunt, circulo quadratum inſcribunt.

Demonſtratio patet ex 4. l. 1. & ex 31. l. 3. Ducantur deinde quatuor tãgentes circulum in B, C, D, E concurrentes in I, F, G, H. Figura I F G H quadratum eſt circulo circumſcriptum.

Demonſtratio patet ex 18. l. 3. ex coroll. 2. p. 36. l. 3. ex 28. & 34. l. 1.

Scholium.

Fig. 5.

Quadratum circumſcriptum circulo, duplum eſt inſcripti. Nam quia angulus B C D in ſemicirculo rectus d eſt; erit quadratum ex D B (hoc eſt quadratum F I) æquale quadratis D C, B C, ac proinde duplum quadrati D C, hoc eſt quadrati C D E B.

d Per 31. l. 3.
e Per 47. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO VIII. & IX.

QVadrato (B E F C) circulum inſcribere & circumſcribere. Fig. 6.

Ducantur diametri in quadrato ſe ſecantes in A. Centro A per B deſcriptus circulus tranſibit etiam per E, F, C.

Deinde ex A duc AD perpendicularem ad CB. Centro A per D deſcriptus circulus tanget omnia quadrati latera.

Pars 1. Quia ex hyp. C B, E B latera ſunt æqualia, erũt anguli B C E, B E C *a* æquales. Angulus autẽ CBE rectus eſt per hyp. Ergo B C E, BEC *b* ſunt ſemirecti. Eodem modo oſtendam C B F & reliquos eſſe ſemirectos, adeoq; æquales inter ſe. Ergo in triangulo B A C cum duo ſint æquales anguli C B A, & B C A, erunt A B & A C *c* æquales. Eadem ratione A B, A E, A F æquales erunt. Circulus igitur centro A per B deſcriptus tranſibit etiam per E, F, C.

Pars 2. Ex A ſint perpendiculares inſuper A G, A H, A I. Quoniam in triangulis G B A & D B A anguli ad D & G, itemq; ad B inter ſe æquales ſunt, latuſq; A B cõmune, latera *e* A D, A G æqualia erunt. Eadẽ ratione æqualia ſunt AG, A H, AI. Circulus ergo centro A per D tranſiens, tranſibit etiã

a Per 5.l.1.
b Per coroll. 11.p.32.l.1.
c Per 6.l.1.
e Per 26.l.1.

H per

f Per 16. l. 3. per G,H,I, tangetque latera *f* omnia quadrati; quia anguli ad D,G, H, I ſunt recti. Fecimus ergo quod petebatur.

PROPOSITIO X.

Fig. 7. *TRiangulum iſoſceles conſtruere (B A C) in quo angulus ad baſim (A B C, vel A C B,) ſit duplus anguli ad verticem (A.)*

Sumatur quæuis recta A B, quam ita ſeca *a* in D, vt rectangulum A B D ſit æquale quadrato D A. Tum centro A per B deſcribe circulum, cui inſcribe B C *b* æqualem D A, & iunge A C. Erit triangulum B A C quæſitum.

a Per 11. l. 2.

b Per 1. l. 4.

Ducatur enim recta D C, & per C, D, A deſcribe *c* circulum. Quoniam rectangulũ A B D æquatur quadrato A D, hoc eſt B C, liquet B C tangere *d* circulum D O quem ſecat C D. Ergo angulus B C D æquatur *e* angulo A in ſegmento alterno: additoq; communi D C A, erit B C A æqualis duobus A, & D C A. Sed quia latera A B, A C æquantur, A B C æqualis *f* eſt B C A. Ergo etiam A B C æquatur duobus A, & D C A. Sed etiã externus B D C *g* æquatur duobus internis A & D C A. Ergo A B C & B D C æquales ſunt. Recta igitur D C æquatur *h* B C, hoc eſt per conſt.

c Per 5. l. 4.

d Per 37. l. 3.

e Per 32. l. 3.

f Per 5. l. 1.

g Per 32. l. 1.

h Per 6. l. 1.

conſt. D A. Ergo anguli A & D C A *k* æ- *k Per ſt* quantur. Quare angulus A B C, qui duobus oſtenſus eſt æqualis, duplus erit vnius A. Factum igitur eſt, quod petebatur.

Corollarium.

ANguli ad baſim ſinguli B & C in triãgulo iſoſcelio iam conſtructo ſunt duæ quintæ duorum rectorum, ſeu quatuor quintæ vnius recti, & reliquus A eſt vna quinta duorum rectorũ ſeu duæ quintæ vnius. Patet ex propoſitione hac & ex 32. lib. 1.

PROPOSITIO XI.

CIrculo pentagonum ordinatum inſcribere. *Fig. 8. & 7.*

Deſcribatur *a* triangulum B A C habens *a Per præc.* angulum ad baſim duplum anguli ad verticem. Huic æquiangulum C A D *o* inſcribe *o Per 2. l. 4.* circulo. Angulos ad baſim A C D, & A D C ſeca biſariam rectis C E, D B, occurrentibus circulo in E & B. Puncta A, B, C, D, E, rectis lineis connexa dabunt pentagonum ordinatum circulo inſcriptum.

Nam ex conſtructione liquet quinque angulos I, N, Q, S, O æquales eſſe. Quare etiã arcus ijs ſubtenſi, A E, E D, D C, C B, B A *b* ſunt æquales. Iraque rectæ ſubtenſæ *b 28. l. 3.*

c Per 27.l.3 arcubus etiam æquales c erunt. Pentagonum igitur æquilaterum eſt. Eſt vero etiam
d Per 29.l.3. æquiangulum d quia eius anguli B A E, A E D, &c. inſiſtunt arcubus æqualibus B C D E, A B C D, &c. Factum eſt igitur quod petebatur.

Corollarium.

Fig. 8. ANgulus Pentagoni ordinati facit ſex quintas vnius recti, ſeu tres quintas duorum. Nam tres anguli ad A, cùm ſint æquales, vtpote æqualibus arcubus B C, C D, D E inſiſtentes, & medius per coroll. præced. ſit duæ quintæ vnius recti, tres ſimul, hoc eſt ipſe pentagoni angulus, conficient ſex quintas vnius recti.

Scholium.

INgenioſa eſt Euclidæa pentagoni inſcriptio, ſed multò expeditior illa Ptolomæi, quam tradit lib. 1. Almageſti, & eſt eiuſmodi.

Fig. 11. *Ducantur diametri* E D, B F *ſe mutuo perpendiculariter interſecantes in* A. *Radium* A D *biſeca in* C. *Centro* C *per* B *deſcribe arcum, diametro* E D *occurrentem in* G. *Recta* G B *eſt latus pentagoni, &* A G *decagoni.*

Demonſtratio hîc dari nequit, pendet enim à lib. 13. Eucl. Eam vide apud Clauium in ſcholio poſt p. 10. l. 13.

Pro-

Problema.

SVper datâ rectâ (AB) pentagonum ordinatū ſita conſtrues. Seca e A B, ſic vt rectangulum A B C ſit æquale quadrato A C. Ex A B vtrimq; productâ aufer A D, B E æquales maiori ſegmento A C. Centris A & D, interuallo A B deſcribe arcus duos ſeſecantes in F; Item centris B & E, eodem interuallo ſe ſecantes in G. Rurſum centris F & G, interuallo itidem A B, alios ſe ſecantes in I. Puncta A, F, I, G, B rectis lineis iuncta dabunt pentagonum ordinatum, (hoc eſt æquilaterum, & æquiangulum) ſuper datâ A B. Fig. 9. e Per 11. l. 2.

Æquilaterum eſſe patet ex conſtructione: æquiangulū eſſe ſic demonſtrabitur. Ducatur D F. Patet ex conſtructione triangulum A F D eſſe iſoſceles. Et baſis A D eſt maius ſegmentum lateris D F, extrema & media ratione ſecti (eſt enim D F æqualis A B, & A D, æqualis A C.) Ergo angulus o D A F eſt duæ quintæ duorum rectorum. Ergo reliquus F A B eſt p tres quintæ duorum rectorum, ſiue ſex quintæ vnius rect: ac proinde eſt q angulus pentagoni ordinati. Eodem modo oſtenditur angulum G B A eſſe ſex quintas vnius recti, ac proinde parem F A B. Vnde neceſſe iam eſt reliquos F, G, I, his æquales eſſe, vt patet ex 8. l. 1. ſi concipiatur ſubtendi recta F G. o Per corol. p. 10 l. 4. p Per 13. l. 1. q Per corol. p. 11. l. 4.

PROPOSITIO XII.

Fig. 10. *Circulo pentagonum ordinatum circumſcribere.*

Inſcribatur pentagonum ordinatum per præced. G H I K M, ducanturque tangentes in punctis, G,H, I,K,M, quæ concurrant in B,C,D,E,F. Dico factum.

Ex centro duc rectas A G, A B, A H, A C, A I. Quoniam B G, B H ex vno puncto B, tangunt circulum, æquales *a* erunt. Trigona igitur G A B, H A B, ſibi mutuo æquilatera ſunt. Æquātur ergo *b* anguli O, P, item Q, S; ac proinde totus B duplus eſt ipſius P, & totus G A H duplus eſt S: Eâdem de causâ anguli C & H A I dupli ſunt ipſorum T, & N. Sed G A H, & H A I, æquales *c* ſunt, quia inſiſtunt arcubus æqualibus G H, H I, per conſtr. Ergo etiam eorum dimidij S, N æquales erunt. Quoniã igitur in triangulis B A H, C A H, duo anguli S, N æquantur, itemq; duo ad H *d* recti, latuſq; A H eſt commune, etiam *e* B H, C H, itemq; anguli, P, T, æquales erunt. Eodem modo oſtendam rectas B G, F G eſſe æquales. Igitur C B, F B duplæ ſunt æqualiũ B G, B H, ac proinde æquales. Eodem modo oſtendam reliqua latera pentagoni circumſcripti

a Per corol. 2. p. 36. l. 3.
b Per 8. l. 1.
c Per 29. l. 3.
d Per 18. l. 3.
e Per 26. l. 1

circumſcripti

cumſcripti eſſe æqualia. Illud igitur æquilaterum erit: eſt vero & æquiangulum, quia cum iam oſtenſum ſit angulos, B, & C, duplos eſſe æqualium, P, & T; etiam ipſi æquales erunt: eodemque modo & reliqui. Ordinatum igitur pentagonum circulo circumſcripſimus. Quod erat faciendum.

Eodem artificio circulo circumſcribitur ordinata figura quæcunque, ſi prius illi ſimilis circulo inſcribatur.

PROPOSITIO XIII. XIV.

PEntagono ordinato circulum inſcribere, & circumſcribere. Fig. 11.

Duos pentagoni angulos B, C, biſeca rectis B N, C S concurrentibus in A. Ex A duc perpendicularem A L.

Circulus centro A per L deſcriptus, tanget omnia pentagoni latera. Circulus vero deſcriptus centro A, per B, tranſibit etiam per C, D, E, F.

Pars 1. In trigonis D C A, B C A, quia latera D C, C A, *a* lateribus B C, C A, itemque *b* anguli P, & O æquantur, etiã G, & I, æquales *c* erunt. Sunt vero *a* etiam toti B & D æquales. Quare cum *d* angulus G ſit dimidius anguli B, etiã, I, erit dimidius ipſius D. Igitur D quoq; biſectus eſt rectâ D M. Ob eandem cauſam, reliqui pentagoni an-

a *Per hyp.*
b *Per conſtr.*
c *Per 4. l. 1.*
a *Per hyp.*
d *Per conſtr.*

guli E, F ſunt biſecti; ac proinde omnes dimidij anguli inter ſe æquales erunt. Ducantur inſuper perpendiculares A M, AS, A N, A R. Quoniam igitur in trigonis L B A, M B A, anguli G, & Q æquantur, & latus L B lateri M B *e* æquale eſt, latuſque B A commune, etiam *f* A L, A M æquales erunt. Pari modo oſtendam reliquas A M, A S, A N, A R inter ſe æquari. Circulus ergo centro A tranſiens per L, tranſibit etiam per M, S, N, R; & quia anguli ad L, M, S, N, R, recti ſunt, per conſtr. tanget *g* quinque latera pentagoni. Quod erat primum.

e Per corol. 2. p. 36 l. 3.
f Per 4. l. 1.
g Per 16. l. 3.

Pars 2. in trigono C A B, quia anguli O, & G, iam oſtenſi ſunt æquales, erunt latera A C, A B *h* æqualia; eâdemque ratione æquantur etiam A B, A F, A E, A D; ac proinde circulus centro A tranſiens per B, tranſibit etiam per C, D, E, F. Pentagono igitur circulum inſcripſimus & circumſcripſimus, Quod erat faciendum.

h Per 6. l. 1.

PROPOSITIO XV.

Fig. 13.

In dato circulo Hexagonum ordinatum deſcribere,

Ducatur diameter F A B. Centro B per centrum A, deſcribe circulum, qui datum ſecet in C, & D. Item centro F per A deſcribe circulum, qui ſecet datum in E, & G, ſex

ſex puncta B, C, E, F, G, D, rectis lineis connexa dabunt quæſitum.

Ex centro A emittantur rectæ A C, A E, A G, A D. Patet triangula H, I, M, L *a* eſſe æquilatera: deinde quia anguli C A B, E A F, ſinguli *b* efficiunt vnam tertiam rectorum duorum, ac proinde ſimul duas tertias, patet *c* E A C etiam eſſe vnam tertiam duorum rectorum. Anguli igitur E A C, C A B æquales ſunt, ſunt autem & latera E A, A C, æqualia lateribus B A, A C. Ergo *d* baſis E C baſi C B, hoc eſt (vt iam oſtenſum) radio, A C, æqualis eſt. Quare etiam N æquilaterum eſt. Eodem modo oſtenditur æquilaterum eſſe K. Quoniam igitur triangula omnia H, I, K, L, M, N, æquilatera ſunt. Patet latera ſingula C B B D, D G, G F, F E, E C æquari radio circuli A C, ſeu A B, ac proinde inter ſe. Hexagonum igitur æquilaterum eſt. Eſt vero & æquiangulum, cum ſinguli eius anguli E, C, B, D, G, F conſtent duobus æquilateri trianguli angulis. Ergo Hexagonum quod circulo inſcripſimus, eſt ordinatum.

a Ex 1. *l.* 1.
b Per *corol.* 12. *p.* 32. *l.* 1,
c *Per coroll.* 1. *p.* 13. *l.* 1.
d *Per* 4. *l.* 1.

Corollaria.

1. LAtus hexagoni circulo inſcripti æquale eſt radio.

2. Angulus hexagoni ordinati eſt quatuor tertię vnius recti, conſtat enim ex duobus

bus angulis trianguli æquilateri quorum ſinguli conficiunt *d* duas tertias vnius recti.

d Per corol. 32. p. 32. l. 1.

Fig. 14.

3. Si ducatur inſuper diameter P S, perpendicularis alteri F B, & interuallo radij P A, centris P, & S, ſectiones fiant in O, & Q, in R, & T; puncta P, E, O, F, R, G, S, D, T, B, Q, C, rectis lineis cõnexa dabunt duodecangulum ordinatum vnâ circini aperturâ circulo inſcriptum. Id quod magno eſt vſui in Gnomonica.

Fig. 14.

4. Ex demonſtratis elicitur etiam deſcriptio facillima trianguli æquilateri in circulo. Ducta diametro F B, centro B per A centrum deſcribe arcum C A D. Puncta C, F, D, rectis iuncta dant æquilaterum quæſitum.

5. Æquilateri trianguli latus (C X D) à diametro (B F) ad ipſum perpendiculari, quartam partem (B X) abſcindit. Nam anguli A C X, B C X, æqualibus arcubus G D, D B inſiſtentes, æquales *e* ſunt: & latera A C, C X æquantur lateribus B C, C X. Ergo A X, B X *f* æquales ſunt. Ergo B X eſt quarta pars diametri B F.

e Per 29. l. 3

f Per 4. l. 1.

Scholium.

Problema.

Fig. 13.

x Per 1. l. 1.

HExagonũ ordinatum ſuper data recta (C B) ita conſtrues. Fac x triangulum C A B æquilaterum

laterum ſupra datam C B. Centro A per B, & C deſcribe circulum. Is capiet hexagonum ſuper datâ rectâ C B. Patet ex propoſ. & corol. 1.

Theorema.

QVadratum ex latere trianguli æquilateri, triplum eſt quadrati ex ſemidiametro circuli, cui inſcriptum eſt, adeoque ad quadratum diametri eſt vt 3. ad 4.

Ducatur ſemidiameter A D. Quadratum F D, æquatur quadratis s F A, D A, & rectāgulo F A X bis. Sed rectang. F A X bis eſt par quadrato ſemidiametri F A, ſeu D A (nam quia A X, X B æquales t ſunt rectangulum F A X bis æquatur duobus rectangulis nempe ſub F A, A X, & ſub F A, X B; hoc eſt rectāgulo u F A B; hoc eſt quadrato F A.) Ergo quadratum F D triplum eſt quadrati ex ſemidiametro, Fig. 14. s Per 12. l. 2. t Per coroll. 5. præced. u Per 1. l. 2.

Quia autem quadratum totius diametri F B quadruplum x eſt quadrati F A. Patet quadratum F D eſſe ad quadratum diametri, vt 3. ad 4. x Per 4. l. 2.

Hinc ſequitur latus æquilateri trianguli eſſe ad diametrum, vt radix quadrata ternarij eſt ad 2. radicem nempe quadratam quaternarij, ac proinde eſſe lineas incommenſurabiles.

PROPOSITIO XVI.

IN circulo quindecagonum ordinatum deſcribere. Fig. 15.

Cir-

a Per 11. l. 4. b Per corol. 4. p. 15. l. 4.

Circulo inſcribe a latus pentagoni A C & trianguli b æquilateri latus A D. Arcum C D biſeca in E. C E eſt latus quindecagoni.

Nam ſi tota peripheria ſtatuatur eſſe 15. erit arcus A C, 3. & arcus A D, 5. ac proinde arcus C D, 2. ideoque C E vnum.

Corollarium.

Fig. 15.

HAc methodo innumeræ figuræ ordinatæ circulo inſcribentur. Nam ſi duarum ordinatarum latera A C, A D circulo ſint inſcripta, arcuum differentia C D continebit tot latera nouæ figuræ ordinatæ, quot vnitatibus differunt denominatores priorum. Denominator autem nouæ figuræ habetur, ſi denominatores priorum inter ſe multiplicentur.

Vt ſi A D ſit latus quadrati, & A C decagoni. Denominatorum differentia eſt 6. Igitur arcus C D continet 6. latera figuræ nouæ. Ea vero eſt 40. laterum. Denominatores enim 4. & 10. inter ſe multiplicati faciunt 40.

Scholium.

NOndum reperta ars eſt, quâ ſolo circino & regulâ inſcribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7. 9. 11. 13. 17. *&c. Cum illa inſcriptio figuræ*

figurarum dependeat à diuiſione circumſerentiæ in partes datas, quæ etiamnum deſideratur. Licebit tamen, circuli circumſerentiâ in 360. partes diuiſâ, mechanicè figuras quaſcunque ordinatas circulo inſcribere hunc in modum.

Problema 1.

GRadus 360. (*hoc eſt totã circumſerentiam*) *diuide per denominatorem polygoni inſcribendi (exem. gr. nonanguli) quot vnitatibus conſtat quotiens* (40.) *tot graduum fac in centro angulum A G K. A K erit latus figuræ quæſitæ (nonangulæ) circulo inſcribendæ.* Fig. 15.

Problema 2.

AT *ſuper data recta quamuis figuram ordinatam deſcribes præſidio tabellæ ſequentis: Angulus rectus eſt ad angulum figuræ.* Fig. 15.

					differ.
In Pentagono	*vt*	5	*ad*	6...	1
Hexagono	*vt*	3	*ad*	4...	1
Heptagono	*vt*	7	*ad*	10...	3
Octogono	*vt*	2	*ad*	3...	1
Nonagono	*vt*	9	*ad*	14...	5
Decagono	*vt*	5	*ad*	8...	3
Vndecagono	*vt*	11	*ad*	18...	7
Duodecagono	*vt*	3	*ad*	5...	2

Oporteat igitur ſuper data recta X B heptagonum ordinatum deſcribere. Centro X deſcribe circulum, Fig. 15.

culum, à quo abſcinde quadrantem B O. Vide in tabula quæ ſit proportio recti anguli ad angulum heptagoni, reperies, vt 7. ad 10. & differentia eſt 3. Quadrantem igitur partire in 7. arcus æquales, quorum adhuc tot ipſi adde ex O in N, quot vnitates habet differentia. Per tria puncta B X N, a Per 5. l. 4. deſcribe a circulum, hic capiet heptagonum data recta X B.

Tabella confecta eſt ope theorematis 2. in ſchol. poſt 32. l. 1. quo reperitur numerus rectorum angulorum, quos efficiunt anguli cuiuſcunq; rectilinei, qui numerus diuiſus per denominatorem figuræ exhibet denominatorem proportionis anguli figuræ ad rectum.

Quoniam vero de figuris ordinatis multa hactenus ſunt propoſita, finiat hunc librum Procli celebre theorema.

Theorema.

TRes tantum figuræ ordinatæ videlicet 6. triangula æquilatera, 4. quadrata, 3. hexagona, ſpacium replere poſſunt: Hoc eſt vnam continuam ſuperficiem conſtituere. Quod ſic demonſtratur. Vt aliqua figura ordinata ſæpius repetita poſſit replere ſpacium, requiritur vt anguli plurium eius ſpeciei figurarum circa vnum punctum compoſiti, poſſint conficere quatuor rectos: tot enim circa vnum punctũ poſſunt conſtitui, vt patet ex coroll. 3. p. 13. l. 1. exempli gr. vt triangula æquilatera poſſint replere ſpacium, requiritur

quiritur, ut aliquot anguli talium triangulorum Fig. 13.
N,M,L,K,I,H, circa punctum A compoſiti efficiant quatuor rectos. Atqui quatuor rectos efficiunt, 6. anguli trianguli æquilateri (nam unus ſacit duas tertias b *unius recti, ac proinde 6. faciunt 12. tertias unius recti, hoc eſt 4. rectas;) item 4. anguli quadrati, ut patet; item 3. anguli hexagoni (unus enim facit 4. tertias* c *unius recti, ac proinde 3. faciunt 12. tertias unius recti, hoc eſt rurſum 4. rectos.) Ergo &c.*

b Per coroll. 12.p.32.l.1.

c Per corol. 2.p.15.l.4.

Quod autem id nulla alia figura poſſit, liquidò conſtabit ſi angulum eius repertum, ut ſupra, quocunque numero multiplices: ſemper enim aut deficient à 4. rectis, aut excedent.

ELE.

ELEMENTORVM GEOMETRIÆ LIBER V.

Quanti momenti in Geometria ſit ſcientia proportionum, nemo eſt Mathematicus, qui ignoret. Ea traditur ab Euclide toto quinto & ſexto libro. Sed quãuis illi cæteriſq; elementorum conditoribus plurimum debeamus; in ijs tamen, quæ de proportione tradiderunt, deſiderari aliquid videtur. Difficultas tota in definitione 5. l. 5. vertitur: vbi tradit Euclides, quid ſit quatuor magnitudines eſſe proportionales, ſiue duas rationes eaſdẽ, ſimiles, æquales eſſe. Definit igitur duas rationes tum æquales dici ſeu ſimiles, quando antecedentia quocunq; numero æqualiter multiplicata, cõſequentibus etiam quocunq; numero æqualiter multiplicatis, ſemper vel ſimul æqualia ſunt, vel ſimul maiora, vel ſimul minora a. Atq; ex ea definitione omnes deinde 5. & 6. libri demõſtrationes mediatè vel immediatè deducit. Hæc doctrinæ Euclidææ ſumma: quæ multiplicẽ, vt dixi, difficultatẽ habet. Nam inprimis certũ eſt eâ definitione non naturã æqualium rationum, ſed affectionem ſolummodo aliquã explicari. Deinde illa multiplicium proprietas adducitur,

a Hæc definitio declaratur infra. poſt defin. 6.

titur, vel tanquam ſignum infallibile rationum æqualium, vt quandocumq; ea demonſtrata fuerit de quibuſuis rationibus, inferre certò liceat æquales eas eſſe: vel is ſenſus illius eſt, vt per magnitudines eandem rationem habentes nihil aliud intelligi velit, quàm earum multiplices modo iam dicto excedere, vel excedi. Si primum; demonſtrare debuerat, eam affectionem omnibus & ſolis rationibus æqualibus ineſſe, vt ex eâ rationũ æqualitas certò poſſit inferri. Id verò minimè vulgare theorema eſt, quod neq; Euclides, neq; alius poſt Euclidem vllus demonſtrauit. Si ſecundum; ſecuri quidem erimus de veritate theorematum in ſenſu definitionis acceptorũ, minimè tamen ex vi demonſtrationũ nobis conſtare poterit de abſolutâ rationum æqualitate. Exemplũ eſto prima ſexti. Certi erimus ex Euclideâ demonſtratione rationẽ triangulorum A B C, & D E F æqualẽ eſſe rationi baſium A C, & D F, per rationum æqualitatem, ſolum intelligendo dictam illam proprietatem multiplicium; non colligemus tamen rationes illas triangulorum, baſium rationibus verè & abſolutè æquales eſſe, cum demonſtratum non ſit affectionem illã multiplicium cum abſolutâ & verâ rationum æqualitate neceſſario eſſe connexã. Quomodocunque igitur illa definitio accipiatur, librorum 5. ac 6. demonſtrationes vacillant, quamdiu demonſtratum non fuerit verã rationum æqualitatem cum ea multiplicium proprietate ſemper eſſe connexam. Denique vt ſibi conſtarent omnia,

Fig. 2. l. 6. tabulâ 4.

tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliiſq; ſemper diſplicuit; & tyronibus plurimum ſemper faceſſiuit negotij, quorum ita pleirumque mentes intricat, vt exitum vix reperiant. Quare vt doctrinam proportionum, quæ quaſi medulla, atque anima Geometriæ, & vniuerſæ Matheſeos eſt, ab ea labe vindicemus, hæc tria præſtare conabimur:

Primò oſtendam libri quinti theoremata, quæ ab Euclide per multiplices demonſtrantur, eo ferè loco habenda eſſe, quo axiomata, ac proinde declaratione potiùs ſubinde aliquâ, quã demonſtratione egere. Ita proportionum cognitio, quam ille circuitus multiplicium difficilem hactenus, & perobſcuram effecerat, plana & expedita reddetur.

Secundò demonſtrabimus, quandocumq; antecedentium quælibet æquè multiplices, conſequentium quibuſlibet æquè multiplicibus vel pariter maiores ſunt, vel pariter minores, vel pariter æquales, tum rationes eſſe verè æquales, ſeu ſimiles. Quo ſtabilito omnes Euclidææ demonſtrationes, totaq; illius de proportionibus doctrina ſubſiſtet, vt qui noſtris probationibus contentus non ſit, ad Euclidæas quamuis prolixas, iam tamẽ ſecuras ac ſolidas ſe poſſit conuertere. Aſſignabimus itẽ (ac demonſtrabimus,) proportionũ æqualium aliud indicium clariſſimũ ac primum, ex quo omnes Quinti libri propoſitiones, deducere poterit, qui voluerit.

Tertio. De proportionum denominatoribus, algorythmo, compoſitione, tractatum ſubiungã penitioris Geometriæ ſtudioſis planè neceſſariũ, vbi

etiam

etiam demonſtrabimus axioma illud, ſeu potiùs theorema hactenus indemonſtratum, rationem extremarum ex rationibus quotlibet intermediorum componi.

Tyronibus ſatis erit definitiones & primam partem perlegere.

PRIMA PARS.

Proportionum elementa faciliori methodo proponuntur.

DEFINITIONES.

1. PArs aliquota magnitudinis eſt, quæ aliquoties repetita, magnitudinem metitur, ſiue adæquat. Pars aliquanta, quæ non metitur.

Longitudo vnius pedis eſt pars aliquota longitudinis 10. pedum, quia illam decies repetita metitur. Longitudo vero 4. pedum, eſt pars aliquanta lineæ 10. pedum, quia aliquoties repetita, nempe bis, illam non adæquat, repetita vero ter, excedit.

2. Magnitudo magnitudinis multiplex eſt, cum minor metitur maiorem, ac proinde eius pars aliquota eſt; ſiue cum maior minorem aliquoties continet præcisè.

3. Ratio ſiue proportio eſt duarum eiuſdem generis magnitudinum mutua quædam ſecundùm quantitatem habitudo.

Sunt igitur in omni proportione duo termini; quorum ille Antecedens dicitur, qui primò nominatur, ſiue is qui nominandi caſu effertur: alter Conſequens.

Cum antecedens & conſequens ſunt æquales, proportio æqualitatis dicitur, cum inæquales, dicitur eſſe proportio inæqualitatis.

4. Ratio ſeu proportio rationalis eſt, quæ exiſtit inter magnitudines commenſurabiles, & numeris exprimi poteſt. Proportio irrationalis eſt, quæ exiſtit inter magnitudines incommenſurabiles, & nullis numeris explicari poteſt.

Porro commenſurabiles quantitates ſunt, quas aliqua communis menſura metitur; incommenſurabiles quas nulla metitur menſura communis.

Fig. 1 ad 5. tabula 3. 5. Duæ rationes (A ad B, & C ad F) ſunt ſimiles, æquales, eædem; cum vnius antecedens (A) æquè ſeu eodem modo (hoc eſt nec magis, nec minus) continet ſuum conſequens (B,) quo alterius antecedens (C) continet ſuum conſequens (F.)

Fig. 2. Vel quando vnius antecedens (A) eodem modo continetur in ſuo conſequente (B,) quo (C) antecedens alterius in ſuo (D.)

Fig. 3. 6. Duæ rationes ſunt diſſimiles, ſiue vna ratio eſt maior alterâ, quando vnius antecedens (I) magis continet ſuum conſequens

Fig. 4. (L,) quam alterius antecedens (O) contineat

neat ſuum conſequens (Q;) vel quando antecedens vnius, minus continetur in ſuo conſequente, quàm antecedens alterum contineatur in conſequente ſuo.

Proportionum æqualitas & inæqualitas explicatur.

QVid porro ſit vnum antecedens æquè, vel magis continere ſuum conſequens, quàm antecedens alterum contineat ſuũ, ſi proportiones ſint rationales, definiri & explicari vlterius poteſt per numeros, vt ſi A ſit triplum B, & C triplum F, perſpicuum erit, quid ſit, A æquè ſeu eodem modo continere B, quo C continet F: vel ſi I ſit triplum Fig. 1. *L, Q verò duplum, Q; conſtabit rurſum, quid ſit I* Fig. 3. *magis continere L, quam Q contineat Q. At ſi proportiones fuerint irrationales, ea res explicari vlterius nec poteſt, nec debet. Dentur magnitudines* Fig. 5. *incommenſurabiles A, B, perſpicuum eſt A non ſolum maius eſſe B, ſed etiam certo quodam modo eſſe maius, (A quippe aliter continet B, quàm alia quælibet maior minorûe quàm A:) neque tamen vlteriùs quæri, aut explicari debet, quis ſit certus ille modus, quo A continet B: quia per nullos numeros explicabilis eſt. Itaque quemadmodum datis binis incommenſurabilibus quantitatibus non debet vlteriùs quæri, quid ſit vnam certo modo continere alteram, ita neq; cum dantur quatuor proportionales incõmenſurabiles, quæri debet vlteriùs, quid ſit C eodem modo continere D, quo A* Fig. 5.

 con-

continet B. Sicuti enim modus quo A continet B, vlterius eſt inexplicabilis, ita planè etiam identitas modi, quo A continet B, cum modo, quo C continet D, vlterius inexplicabilis eſt.

Fig. 5. Quod verò cuicumque proportioni irrationali A ad B, dabiles ſint infinitæ aliæ proportiones irrationales æquales, maiores, minores, diuerſis terminis conſtantes, facilè poterimus intelligere hunc in modum. Sumatur quæcunque quantitas C, & auferatur B ex A incommenſurabili ſecū quantitate, quoties poteſt, puta ter: & ſuperſit E F. Sit deinde O tertia pars ipſius C, ſit inſuper quæpiā X ipſi C incommenſurabilis, quæ maior ſit quam O. Quoniā igitur A continet B plus quā ter, C vero continet X minus quam ter (nam C continet præciſe ter O minorem quam X) erit ratio irrationalis C ad X minor ratione irrationali A ad B. Accipiatur iam Q, quarta pars C, & quæpiam eſto Z, ipſi C incommenſurabilis, quæ minor ſit quam Q. Quoniam igitur A continet B minus, quam quater; C vero continet Z plus quam quater (cum C præciſè quater contineat Q, maiorem quam Z) erit ratio irrationalis C ad Z maior ratione irrationali A ad B.

Fig. 5. Iam vero, quia C ad aliquam X minorem rationem habet quā A ad B; & rurſum, quia C ad aliquā Z maiorem rationem habet quam A ad B; manifeſtum eſt etiam C ad aliquam D mediam inter X & Z, eandem habere rationē quam A ad B. Quod quidem perinde clarum eſt lumine natu-

rali,

rali, atque iſtud: dabile eſt maius quam P, & dabile eſt minus quam P, ergo dabile eſt æquale aliquod ipſi P.

Quid in proportionum æqualium definitione Euclidæâ deſideretur.

QVod ad Euclidem attinet, is duas proportiones A ad B, C ad F æquales eſſe dicit, cum antecedentium quæcunque æquè multiplices I, Q, conſequentium quibuſcumque æquè multiplicibus L, R, vel ſimul maiores ſunt, vel ſimul minores, vel ſimul æquales: hoc eſt cum I ſuperante L, etiam Q ſemper ſuperat R; & cum I ſuperatur ab L, etiam Q ſemper ſuperatur ab R; & cum I eſt æqualis L, etiam Q ſemper eſt æqualis R. Vbi benè notandum eſt, Euclidem non aſſumere æquè multiplicium exceſſus defectuſque proportionales, ſeu ſimiles, ſic enim ineptè idem per idem explicaſſet; ſed exceſſus & defectus ſimpliciter. Nihilominus hic aliquid in ſummo Geometrâ deſiderari iam ſupra declarauimus. Nā vel cupit hiſce verbis rationes æquales definire, & ſic rei definitæ proprietatē pro definitione afferi; euidens quippe eſt, hanc multiplicium affectionē ex rationum æqualitate profluere: vel adducit tanquam indicium primum & infallibile rationum æqualium; & ſic demonſtrare debuerat, eam cum rationum æqualitate ita ſemper eſſe cōnexam, ut hæc ex illâ certò poſſit inferri. Quæ quidem connexio & perobſcura & demonſtratu Fig. 21.

continet B. Sicuti enim modus quo A continet B, vlterius eſt inexplicabilis, ita planè etiam identitas modi, quo A continet B, cum modo, quo C continet D, vlterius inexplicabilis eſt.

Fig. 5. *Quod verò cuicumque proportioni irrationali A ad B, dabiles ſint infinitæ aliæ proportiones irrationales æquales, maiores, minores, diuerſis terminis conſtantes, facilè poterimus intelligere hunc in modum. Sumatur quæcunque quantitas C, & auferatur B ex A incommenſurabili ſecū quantitate, quoties poteſt, puta ter: & ſuperſit E F. Sit deinde O tertia pars ipſius C, ſit inſuper quæpiā X ipſi C incommenſurabilis, quæ maior ſit quam O. Quoniā igitur A continet B plus quā ter, C vero continet X minus quam ter (nam C continet præciſe ter O minorem quam X) erit ratio irrationalis C ad X minor ratione irrationali A ad B. Accipiatur iam Q, quarta pars C, & quæpiam eſt Z, ipſi C incommenſurabilis, quæ minor ſit quam Q. Quoniam igitur A continet B minus, quam quater; C vero continet Z plus quam quater (cum C præciſè quater contineat Q, maiorem quam Z) erit ratio irrationalis C ad Z maior ratione irrationali A ad B.*

Fig. 5. *Iam vero, quia C ad aliquam X minorem rationem habet quā A ad B; & rurſum, quia C ad aliquā Z maiorem rationem habet quam A ad B; manifeſtum eſt etiam C ad aliquam D mediam inter X & Z, eandem habere ratione quam A ad B. Quod quidem perinde clarum eſt lumine natu-*

rali,

quens, vel conſequentis aliquota, ſæpius continetur in antecedente.

Vt ſi vna centimilleſima C F *ſæpius contineatur in* A B, *quã vna centimilleſima* N Q, *in* G M, *erit ratio* A B *ad* C F *maior ratione* G M *ad* N Q, *quamuis innumera alia conſequentium* C F, N Q *ſimiles aliquotæ in antecedentibus* A B, G M *æquali numero continerentur.* Fig. 26.

Porrò æquali numero contineri dicuntur, cum ablatæ quoties poſſit, æquali numero ſunt ablatæ.

Ex hoc indicio rationum irrationalium æqualitas & inæqualitas continuò eluceſcit, cum ſit antecedentes conſequentibus incommenſurabiles, per ablata, conſequentibus commenſurabilia & proportionalia exhauriantur.

7. Similes partes ſunt, quæ in ſuis totis æquè, ſeu eodem modo continentur, vt qualis pars ſui totius eſt vna, talis pars ſui totius ſit altera. Quod ſanè nihil aliud eſt, quam partes ad ſua tota eandem habere rationem.

Similes vero partes aliquotæ ſunt, quæ ſua tota æqualiter metiuntur; vt ſi vtraque ſit ſui totius vna tertia, vna decima &c.

8. Magnitudines (A B C D) continuè proportionales dicuntur, cum medij termini (B, C) bis ſumuntur; hoc eſt cum ſunt conſequens reſpectu præcedentis, & antecedens reſpectu ſequentis. Fig. 6.

Continuas rationes ſic efferimus, A eſt ad B, vt

B ad

B *ad C, & B eſt ad C, vt C ad D, & ſic deinceps.*

9. Magnitudines diſcretim proportionales ſunt, cum nullus terminus bis accipitur.

Fig. 1. *Diſcretas rationes ſic efferimus A eſt ad B, vt C ad F. Cum plures fuerint proportionales magnitudines, quam tres, ſi proportionales dicantur, ſemper intelligitur diſcretim.*

Fig. 4. 10. Cum magnitudines (A B C D) fuerint continuè proportionales, prima (A) ad tertiam (C) habere dicitur rationem duplicatam eius rationis, quam eadem prima (A) habet ad ſecundam (B:) & prima (A) ad quartam (D) rationem habere dicitur triplicatam, eius, quam eadem prima habet ad ſecundam (B) & ſic deinceps.

11. Homologæ, ſeu ſimiles ratione magnitudines dicuntur antecedentes antecedẽtibus, conſequentes conſequentibus. Vt ſi

Fig. 1. A eſt ad B, vt C ad F; homologæ erunt A, C, & B, F.

Reliquæ definitiones commodius ex ipſis propoſitionibus intelligentur.

Quintus liber propoſitiones complectitur 25. *Ex his* 10. *non alium vſum habent, quam vt reliquæ earum ope per multiplices demonſtrentur. Illis igitur prætermiſſis,* 15. *reliquas proponemus ſolas, Euclidis ordine nõ mutato. Porro huius libri theoremata non ſolis lineis, ſed omnibus omnino quãtitatibus conueniunt. Lineæ igitur, quibus hic vtimur, omne genus quantitatis repræſentant.*

Axioma.

Axioma.

DAtis tribus quantitatibus A, B, C, dabilis eſt quarta Z, ad quam C eam proportionem habet, quam A habet ad B.

PROPOSITIO 1.2.3.4.5.6.

IN noſtra methodo ſunt ſuperfluæ.

PROPOSITIO VII.

SI quantitates A & B fuerint æquales, & alia quæpiam detur Z: erit A ad Z, vt B eſt ad Z. Fig. 7.

& Z erit ad A, vt eadẽ Z eſt ad B.

Hæc propoſitio vti & ſequẽtes quatuor, ſunt meriſſima axiomata, ac proinde nullo modo demonſtrari debent.

PROPOSITIO VIII.

SI quantitates (C & F) fuerint inæquales; maior C ad tertiam Z maiorem habebit rationem, quam minor F habeat ad eandem Z. Fig. 8.

Et Z ad maiorem C minorem habebit rationem, quam eadem Z habeat ad F, quæ minor eſt quam C.

PRO-

PROPOSITIO IX.

Fig. 7. *SI A & B ad Z eandem habeant rationem, æquales ſunt A & B.*

Et ſi eadem Z ad A & B eandem rationem habeat, rurſum A & B æquales erunt.

PROPOSITIO X.

Fig. 8. *SI C ad Z maiorem ratione habeat quam F ad Z, erit C maior quã F.*

Et ſi Z ad F maiorem rationem habeat, quàm eadem Z ad C, erit F minor quàm C.

PROPOSITIO XI.

Fig. 9. *RAtiones, quæ eidem rationi ſunt æquales, eædem, ſimiles, (idem omnia ſignificant) ſunt æquales, eædem ſimiles inter ſe.*

Vt ſi tam ratio A ad B, quam ratio C ad F, ſint æquales rationi X ad Z, erunt quoq; rationes A ad B, & C ad F æquales inter ſe. Siue ſi A ſit ad B, vt X ad Z, & C ſit ad F, vt X ad Z: erit quoque A ad B vt C ad F.

Eodem modo rationes, quæ æqualibus ſunt æquales, inter ſe ſunt æquales.

PRO-

PROPOSITIO XII.

SI ſingulæ magnitudines quotcunq; (A,B,C,) eandem habuerint proportionem ad ſingulas totidem (F,I,L:) quam proportionem habent ſingulæ ad ſingulas, ſiue vna (A) ad vnam (F;) eandem habebunt omnes (A,B,C) ſimul ſumptæ, ad omnes (F, I, L) ſimul ſumptas. Fig. 16.

Rem per ſe manifeſtam exemplo tantum aliquo rationali declaro; vt ſi ſingulæ A,B, C, ſingularum F,I,L, ſint triplæ (hoc eſt ſi ſingulæ ad ſingulas eandem habeant rationem quam 3. ad 1;) etiam A,B,C ſimul ſumptæ, ſimul ſumptarum F,I,L triplæ erunt, (hoc eſt, etiam A,B,C ſimul ſumptæ ad F,I,L ſimul ſumptas rationem habent eandem, quam 3. ad 1. In proportione irrationali res æquè clara eſt.

PROPOSITIO XIII. & XIV.

IN noſtra methodo ſunt ſuperfluæ.

PROPOSITIO XV.

ALiquotæ ſimiles (F,I) eandẽ inter ſe rationẽ habẽt quam tota (A,B.) Fig. 16.

Et

Fig. 11. *Et vniuerſim partes ſimiles (C, F) ſunt inter ſe vt tota (A, B.)*

Verè inſtar axiomatis haberi poteſt, ſi rectè intelligatur; quid ſint partes ſimiles. Vide defin. 7.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 11. vel 1. *SI prima (A) ſit ad ſecundam (B,) vt tertia (C) ad quartã (F;) etiam permutando erit prima (A) ad tertiã (C,) vt ſecunda (B) ad quartam (F.)*

Ponantur B & F eſſe minores quam A & C, nam ſi æquales ſint res patet. Quoniã A ponitur eſſe ad B, vt C ad F, erunt per defin. 7. B & F, totorum A & C partes ſimiles, ac proinde per præced. quam proportionem inter ſe habent tota A, C, eam quoque habent partes ſimiles B, F; hoc eſt, A eſt ad C, vt B ad F.

Scholium.

SI A eſt ad B, vt C ad F, etiam inuertendo erit vt B ad A, ſic F ad C. Per ſe patet.

Apud Euclidem hoc eſt corollarium prop. 4. quæ cum in noſtra methodo tanquam ſuperflua, ſit omiſſa, viſum eſt corollarium illud hoc loco ponere.

PRO-

PROPOSITIO XVII.

SI antecedens vnum (AB) ſit ad conſequens (C B,) vt antecedens alterum (F I) ad conſequens alterũ (L I;) etiam diuidendo erit (AC) exceſſus antecedentis primi ſupra ſuũ conſequens, ad idem conſequens (C B,) vt (F L) exceſſus antecedentis ſecundi ſupra conſequens ſecundam, ad ſecundum conſequens (L I.) Fig. 12.

Axiomatis inſtar aſſumi poteſt: ſi tota A B, F I eandem rationem habeant, ad X & Z, etiam ſimilibus partibus mulctata eandem ad X & Z pergent habere rationem: hoc eſt, adhuc A B ſic mulctata erit ad X, vt F I ſic mulctata ad Z. Id vero eſt quod aſſerit propoſitio. Nam quia ponitur A B eſſe ad C B, vt F I ad L I, erunt a C B, L I ſimiles partes totorum A B, F I; & A C, F L, erunt tota ſimilibus partibus mulctata. Cũ ergo tota habuerint ad C B, L I, eãdem rationem, etiam A C, F L, (hoc eſt tota ſimilibus partibus mulctata) pergent ad C B, L I eandem inter ſe habere rationem; hoc eſt adhuc erit A C ad C B, vt F L ad L I.

a Per def. 7. l. 5.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 12.

SI antecedens vnum (A G) ſit ad conſequens vnum (C B,) vt antecedens alterum (F L) ad conſequens alterum (L I;) etiam componendo erit (A G cum B C) primum antecedens cum ſuo conſequente, ad idem conſequens (C B,) vt (F L cum L I) ſecundum antecedens cum ſuo conſequente, ad conſequens (L I.)

Ruſum enim inſtar axiomatis aſſumi poterit : ſi duæ quantitates A C, F L, eandem ad X & Z habeant rationem, etiam A C, F L ſimiliter, ſeu proportionaliter auctæ pergent ad X & Z eandem habere rationem: hoc eſt adhuc erit A C ſic aucta ad X vt F L ſic aucta ad Z. Id verò eſt quod propoſitio aſſerit. Nam ponitur A C eſſe ad C B, vt, F L, ad L I. Quare ſi ipſis A C, F L, addantur C B, L I; erunt A C, F L proportionaliter, ſeu ſimiliter auctæ. Cum igitur A C, F L eodem modo ſe habeant ad C B, L I, etiam cum ſimiliter fuerint auctæ (hoc eſt ipſæ iam A B, F I) pergent ad eaſdem C B, L I, eodem modo ſe habere; hoc eſt adhuc A B erit, ad C B, vt F I ad L I.

Corol-

Corollarium 1.

SI antecedens vnum (A B) fuerit ad conſequens (C B,) vt antecedens alterum (F I) ad conſequens alterum (L I,) etiam antecedens primum (A B) erit ad (A C,) exceſſum ſuum ſupra conſequens, vt antecedens alterum (F I) eſt ad (F L) exceſſum ſuum ſupra conſequens alterum (L I.) Fig. 12.

Cum enim A B ſit ad C B, vt F I ad L I, erit diuidendo *a* A C ad C B, vt F L ad L I: & inuertendo *b* B C ad C A, vt I L ad L F: & componendo *c* B A ad C A, vt I F ad L F. a Per 17. l. 5. b Per ſchol. p. 16. l. 5. c Per 18. l. 5.

Hæc argumentatio vocatur conuerſio rationis.

Corollarium 2.

SI A C eſt ad A B, vt F L ad F I, erit quoque A C ad C B, vt F L ad L I; & A B ad C B, vt F I ad L I. Fig. 12.

Cum enim ſit vt A C ad A B, ſic F L ad F I, erit inuertendo B A ad C A, vt I F ad L F: & diuid. *d* B C ad C A, vt I L ad L F: & rurſum inuertendo A C ad C B, vt F L ad L I: & compon. *e* A B ad C B, vt F I ad L I. d Per 17. l. 5. e Per 18. l. 5.

PROPOSITIO XIX.

SI vt totũ (A B) eſt ad totum (F I,) ita ablatũ (C B) ſit ad ablatũ (L I,) Fig. 12.

etiam vt totum eſt ad totum, ita reliquum (A C) erit ad reliquum (F L.)

Omnino clarum eſt per ſe. Poteſt tamen ex præcedentibus ſic oſtendi: quoniam A B eſt ad F I, vt C B ad L I, erit permutando a A B ad C B, vt F I ad L I. Ergo per conuerſionem rationis A B eſt ad A C, vt b F I ad F L. Ergo permutando c vt A B ad F I, ita A C ad F L.

a Per 16. l. 5.
b Per corol. 1. præced.
c Per 16. l. 5.

PROPOSITIONES XX. XXI.

IN noſtra methodo ſunt ſuperfluæ.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 13.

SI fuerit A ad B, vt O ad Q; & B ad C, vt Q ad R, & ſic deinceps: erit ex æquo vt A prima ad C vltimam, ita O prima ad vltimam R.

Ponantur C, R eſſe minores quam B, Q: eadem foret oſtenſio, ſi maiores ponerentur. Quoniam a B eſt ad C, vt Q ad R, erunt C, R totorum B, Q, b partes ſimiles. Cum igitur A, & O ad B & Q, eandem habeant rationem, habebunt quoque ad C & R, quæ ſunt ipſorum, B, & Q, partes ſimiles, eandem rationem. Inſtar enim axiomatis eſt, ſi duæ quantitates ad alias duas eandem inter ſe habuerint

a Per hyp.
b Per defin. 7. l. 5.

habuerint rationem, etiam ad partes earum ſimiles, eandem inter ſe habere rationem.

Si plures fuerint vtrimque quantitates quam tres, eodem ratiocinio procedatur ad reliquas.

PROPOSITIO XXIII.

SI fuerit vt A prima ad B ſecundam, ita O prima ad Q ſecundam, & vt B ſecunda ad C tertiam, ita tertia quæpiam R ad primam O; erit ex æquo vt A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q ſecundam. Fig 14.

Vt B eſt ad C, ita [o] poteſt Q eſſe ad aliam quampiam S. Iam quia vt B ad C, ſic [p] R eſt ad O, & vt B ad C [q] ſic Q eſt ad S; erit R ad O, [a] vt Q ad S. Igitur permutando [b] R eſt ad Q, vt O ad S. Deinde, quia O eſt ad Q, vt [f] A ad B, & Q eſt ad S, [i] vt B ad C; ex æquo erit O ad S vt [c] A eſt ad C. Sed iam oſtendi R eſſe ad Q, vt O eſt ad S. Ergo etiam [d] R eſt ad Q, vt A ad C.

o *Per axio. ante 1. l. 5.*
p *Per hyp.*
q *Per conſtr.*
a *Per 11. l. 5.*
b *Per 16. l. 5*
f *Per hyp.*
i *Per conſtr.*
c *Per præc.*
d *Per 11. l. 5.*

Vocatur à Geometris hæc ratio perturbata.

PROPOSITIO XXIV.

SI fuerit vt A ad B, ita C ad F; & vt I ad B, ita L ad F: erit vt A cum I ad B, ita C cum L ad F. Fig. 15.

Quoniam I per hyp. eſt ad B, vt L ad F; erit quoque ᵃ inuertendo B ad I, vt F ad L. Cum igitur A ſit ad B, ᵇ vt C ad F, & B ad I, vt F ad L; ex æquo erit ᶜ vt A ad I, ſic C ad L. Igitur ᵈ componendo vt A I eſt ad I, ſic C L eſt ad L: I verò eſt ad B, ᵉ vt L ad F. Rurſum igitur ᶠ ex æquo A I eſt ad B, vt C L ad F.

a *Per ſchol. p.* 16. *l.* 5.
b *Per hyp.*
c *Per* 22. *l.* 5.
d *Per* 18. *l.* 5.
e *Per hyp.*
f *Per* 22. *l.* 5.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 16.

SI quatuor magnitudines (A B, C F, I, L) fuerint proportionales, maxima (A B) & minima (L) duabus reliquis (C F, I) maiores erunt.

Sit A B ad C F, vt I ad L. Ex maxima A B ſumatur A Q æqualis I; & ex C F ſumatur C R par minimæ L. Erit igitur A B tota ad totam C F, vt ablata A Q ad ablatam C R. Ergo reliqua Q B eſt ad reliquam ᵃ R F, vt tota A B ad totam C F. Sed A B maior ᵇ eſt quam C F. Ergo & Q B maior quam R F. Iam vero quia A Q ipſi I, & C R ipſi L, æquales ſunt, etiam A Q cum L, ipſi I cum C R æquales erunt. Quare ſi ad A Q cum L, addatur maius Q B, & ad I cum C R addatur minus R F, erit totum A Q B cum L, maius toto, I, cum C R F. Quod erat demonſtrandum.

a *Per* 19. *l.* 5.
b *Per hyp.*

Quæ

Quæ ſequuntur non ſunt propoſitiones Euclidis, ſed ex Pappo Alexandrino, alijsq́; deſumptæ ob frequentem earum uſum Euclideis ſubiungi ſolent.

PROPOSITIO XXVI.

SI prima (A) ad ſecundam (B) maiorem rationem habeat, quam tertia (C) ad quartam (F;) habebit inuertendo (B) ſecunda ad (A) primam, minorem rationem, quam (F) quarta ad (C) tertiam. Fig. 17.

Quoniam ponitur A habere ad B maiorem rationem, quam C ad F. Igitur A ad *o* aliquam B X (quæ *a* maior erit quam B) eandem habebit rationem, quam C ad F. Inuertendo igitur erit BX ad A, vt F ad C, & proinde *b* B ad A in minori ratione erit, quam F ad C.

o *Per axio. ante 1. l. 5.*
a *Per 10. l. 5.*
b *Per 8. l. 5.*

PROPOSITIO XXVII.

SI A habet ad B maiorem rationem, quam C ad F, etiam permutando A ad C maiorem rationem habebit, quam B ad F. Fig. 17.

Quoniam ratio A ad B ponitur maior ratione C ad F, erit *o* ratio A ad aliam B X (quæ neceſſario maior eſt quam *a* B) æqua-

o *Per axio. ante 1. l. 5.*
a *Per 10. l. 5.*

b Per 16. l. 5. lis rationi C ad F. Iam igitur b permutando A erit ad C, vt B X ad F. Sed B X ad F eſt c Per 8. l. 5. in maiori ratione, c quam B ad F. Ergo etiam A eſt ad C in maiori, quam B ad F.

Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 18.

SI A B ad B C maiorem rationem habet, quam F I ad I L; etiam componendo A C, ad B C maiorem rationem habet, quam F L ad I L.

o Per axio. ante 1. l. 5. a Patet ex 10. l. 5. b Per 18. l. 5. c Per 8. l. 5.

Quoniam ponitur A B ad B C eſſe in maiori ratione, quam F I ad I L. Ergo o alia O B (quæ neceſſario erit minor, a quam A B) eſt ad B C, vt F I ad I L. Ergo b componendo O C eſt ad B C, vt F L ad I L. Ergo A C eſt ad B C in c maiori, quam F L ad I L.

Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 18.

SI A C ad B C maiorem rationem habet, quam F L ad I L; etiam diuidendo A B ad B C maiorem habet rationem, quam F I ad I L.

Quia

Quia ponitur A C ad B C maiorem habere rationem, quam F L ad I L; ergo o alia O C (quæ neceſſario minor erit, a quam A C) erit ad B C, vt F L ad I L. Iam igitur erit diuidendo b O B ad B C, vt F I ad I L. Ergo A B eſt ad B C in c maiori, quam F I ad I L. o Per axio. ante 1. l. 5. a Per 10. l. 5. b Per 17. l. 5. c Per 8. l. 5.

Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

PROPOSITIO XXX.

SI A C ad B C maiorem rationem habet, quam F L ad I L; conuertendo habebit A C ad A B minorem, quam F L ad F I. Fig. 18.

Quoniam A C eſt ad B C in maiori, quã F L ad I L, erit diuidendo a A B ad B C in maiori, quam F I ad I L. Ergo inuertendo b C B ad B A, eſt in minori, quam L I ad I F. Ergo componendo c C A eſt ad B A in minori, quam L F ad I F. a Per 29. l. 5. b Per 26. l. 5. c Patet ex 28. l. 5.

PROPOSITIO XXXI.

SI A B ad C maiorem rationem habeat, quam F ad I; & C ad L maiorem rationẽ habeat, quam I ad S; & ſic deinceps; etiam prima A B ad Fig. 19.

vltimam L Q maiorem rationem habebit, quam prima F ad vltimam S.

Quoniam A B eſt ad C in maiori quàm F ad I; Ergo alia,*o* quæpiam O B (quæ neceſſario minor *a* erit quam A B) eſt ad C, vt F ad I. Et quia C eſt ad L Q in maiori quam I ad S; Ergo C ad aliam quampiam L R (quæ erit neceſſario maior quam L Q) eſt vt I ad S. Igitur ex æquo *c* O B eſt ad L R vt F ad S. Ergo O B eſt ad L Q in maiori quam *d* F ad S. Ergo A B eſt ad L Q *e* in multo maiori, quam F ad S.

o Per axio
a Per 10.l.5.
c Per 22.l.5.
d Per 8.l.5.
e Per eand.

PROPOSITIO XXXII.

Fig.19.

SI A B ad C maiorem rationem habet, quàm I ad S; & C ad L Q maiorem quàm F ad I, etiam ex æquo habebit maiorem rationem A B ad L Q, quàm F ad S.

Demonſtratio eadem quæ præcedentis, ſed pro 22. citetur 23.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig.12.

SI tota (A B) ad totam (F I) maiorẽ rationem habuerit, quam ablata (C B) ad ablatam (L I,) tota ad totam minorem rationem habebit, quam reliqua (A C) ad reliquam (F L).

Quia

Quia AB eſt ad F I in maiori, quam C B ad L I; erit *a* permutando etiam A B ad C B in maiori, quam F I ad L I. Ergo conuertendo *b* A B eſt ad A C in minori, quã F I ad F L. Ergo etiam permutando *c* A B eſt ad F I, in minori, quam A C ad F L.

a Per 27. l. 5

b Per 30. l. 5

c Patet ex 27. l. 5.

PROPOSITIO XXXIV.

SI rationes (A ad C, & E ad O) ſunt æqualium rationum (A ad B & E ad F) duplicatæ, aut triplicatæ & ſic deinceps, æquales ſunt etiam ipſæ. Fig. 10.

Quia ratio A ad C duplicata eſt rationis A ad B, erit *a* vt A ad B, ſic B ad C. Ob eandem cauſam erit vt E ad F, ſic F ad O. Cum ergo ſit vt A ad B, ſic per hyp. E ad F; & vt B ad C, ſic F ad O (nã vt B ad C, ſic A ad B, hoc eſt E ad F, hoc eſt F ad O) igitur *b* ex æquo erit, vt A ad C, ſic E ad O.

a Per defin. 10. l. 5.

b Per 22. l. 5

PROPOSITIO XXXV.

RAtiones æquales A ad C & E ad O, ſint duplicatæ, aut triplicatæ, et ſic deinceps, rationum A ad B, & E ad F; etiam hæ æquales erunt. Fig. 10.

Si negas, ſit vt A ad B, ſic E ad aliam Z, inæqualem ipſi F, & fiat vt E ad Z, ſic Z

ad

ad X. Quoniam igitur rationum æqualium A ad B, & E ad Z duplicatæ c ſunt rationes A ad C, & E ad X, etiam ratio E ad X, æqualis erit d rationi A ad C, hoc eſt per hyp. rationi E ad O. Ergo e æquantur O & X. Ergo patet etiam medias F & Z æquales eſſe. Ergo A eſt ad B, vt E ad F ſeu Z, Quod erat demonſtrandum.

c *Per defin. 10. l. 5.*
d *Per præc.*
e *Per 9. l. 5.*

Ex contradictoria aſſertionis directè illata eſt aſſertio.

PARS SECVNDA.

Euclidea per multiplices definitio æqualium rationum, demonſtratur, exhibeturq́ ac demonſtratur aliud magis immediatum, & facilius indicium æqualitatis rationum.

PRoportionum elementis methodo (niſi fallor) commodiori explicatis, reliquum eſt, vt quod ſecundo loco ſupra promiſeram, præſtare aggrediar. Hoc igitur loco (quod à nullo hactenus factum eſt) demonſtrabimus, nihil aſſumendo, niſi quod per ſe lumine naturali ſit manifeſtum, duas rationes inter ſe æquales eſſe, quando antecedentium quælibet æquè multiplices, conſequentium æquè multiplicibus, ſemper ſunt vel pariter maiores, vel pariter minores, vel pariter æquales. Cuius quidem negotij cum ſatis ardua, atque prolixa

ſit

ſit demonſtratio, ut eam reipſa cognoſcemus, facilè apparebit præpoſtere egiſſe Euclidem, qui æqualitatis rationum primum, & fundamentale indiciũ ſumi voluit hac multiplicium indemonſtrata hactenus proprietate, cuius tam remota & obſcura ſit cum rationum æqualitate connexio.

Lemma 1.

SIt A ad B, ut C ad F; & ſint antecedentium, A, C, quælibet æquè multiplices I, Q, nimirum vel duplæ, vel triplæ & ſic deinceps. Sint item conſequentium B, F quælibet æquè multiplices L, R. Erit quoque ut I ad L, ſic Q ad R. Fig. 21.

Quoniam enim A eſt ad B, ut C ad F, etiam I dupla ipſius A erit ad B, ut Q dupla ipſius C eſt ad F: & I, tripla A erit ad B, ut Q tripla C, ad F. Et ſic in infinitum. Quod quidem æquè eſt per ſe clarum ac quodlibet axioma. Quoniam igitur I eſt ad B, ut Q ad F, erit quoque I ad L duplam ipſius B, ut Q ad R duplam ipſius F; & ut I ad L triplam ipſius B, ita Q ad R triplam F: Et ſic in infinitum, quod rurſus tam clarum eſt, quam axioma quodcunque. Liquet ergo propoſitum.

Lemma 2.

SI quantitates A, B habeant communem menſuram C; erit A toties ſumpta, quoties eſt C in B, æqualis quantitati B toties ſumptæ, quoties C eſt in A. Fig. 22.

Pona-

Ponatur C cõtineri in B quater, & in A ſexies, ac proinde B eſſe 4. C, & A eſſe 6. C. Igitur 6. C (hoc eſt A) ducta in 4. C (hoc eſt toties ſumpta quoties C eſt in B) efficiunt 24. C. Similiter 4. C (hoc eſt B) ducta in 6. C (hoc eſt toties ſumpta quoties C eſt in A) efficiunt etiam 24. C. Ergo A toties ſumpta quoties C in B, æquatur B toties ſumptæ quoties C in A.

Theorema I.

Fig. 23.

SI ratio A B ad F I maior ſit ratione L ad R, tales ſumi poſſunt antecedentium (A B & L) æquè multiplices, tales item æquè multiplices conſequentium (F I, & R,) vt multiplex antecedentis A B rationis maioris excedente multiplam conſequentis (F I) multiplex antecedentis L, rationis minoris non excedat multiplicem ſui conſequentis (R.)

Sit ratio A B ad F I maior ratione L ad R, & ſint A B, & L, maiores rationum termini. Quoniã igitur A B ad F I maiorem habet rationem quàm L ad R; alia quædam quantitas Z a habebit ad F I eandem rationẽ, quam L ad R. Quia iam igitur ratio Z ad F I æqualis eſt rationi L ad R, poniturq; ratio A B ad F I maior ratione L ad R, erit quoque ratio A B ad F I maior ratione Z ad F I;

a Per axio. 20. l. 5.

ac

ac proinde A B maior eſt quam Z: quæ omnia per ſe ſunt manifeſta. Igitur ex A B ſumi poterit A C per Z; eritq́ etiam A C ad F I, vt L ad R. Auferatur reſiduum B C ex A C quoties poteſt, putà ter; tum ſeca A C in tot æquales partes exem. gr. in 6. donec earum vna poſſit auferri ſæpius ex F I, quam B C ex A C, puta quater, & reſiduum eſto O I, quod erit minus vnâ particulâ. Hoc quoque fieri poſſe per ſe eſt manifeſtum, & patet ex p. 1. l. 10. quæ à proportionibus non dependet. Particularum vero illarum quantitas eſto Q.

Quoniam igitur Q eſt menſura communis quãtitatum A C, F O, ergo A C toties ſumpta, quoties Q eſt in F O, nempe quater, æquatur F O toties ſumpta, quoties Q eſt in A C, nempe ſexies. Deinde quia reſiduum O I eſt minus vnâ particulâ, hoc eſt, quam Q, erit O I toties accepta, quoties Q eſt in A C, nempe ſexies, adhuc minor quam A C. Vlterius quia B C minus ſæpè auferri poteſt ex A C, quam Q, ex F I (poſitum quippe fuit B C ex A C auferri tantum poſſe ter, Q vero quater ex F I.) Manifeſtum eſt B C toties ſumptum, quoties Q in F I, nempe quater, maius fore quã A C, ac proinde multo maius eſſe quam O I ſumptum ſexies; quod oſtendi ſupra eſſe minus quã A C. Atqui oſtenſum eſt A C ſumptum quater, & F O ſumptum ſexies eſſe æqualia. Quare ſi A C ſumpto quater addatur B C quater, & ad F O ſexies ſumptum addatur O I ſexies, erunt 4. A C & 4. B C, hoc eſt 4. A B maiora, quam 6. F O & 6. O I, hoc eſt quam

6. F I.

6.F I. Quia vero 4. A C æqualia erant 6. F O, erunt 4. A C minora 6. F I. Sed ut A C ad F I, ita ponebatur ſupra L eſſe ad R. Ergo per lem. 1. etiam 4. L minora ſunt quam 6. R. Accepta ſunt igitur antecedentiũ A B, & L æquè multiplices, nempe quadrupla, item æquè multiplices conſequentium F I & R, nempe ſextupla, & tamen oſtenſum eſt multiplam antecedentis A B (nempe 4. AB) ſuperare multiplicẽ conſequentis F I (nempe 6. F I:) multiplicem vero antecedentis L (nempe 4. L) non excedere multiplicem conſequentis R (nempe 6. R.) Quod erat demonſtrandum.

Theorema 2.

Fig. 21.

SI antecedentiũ (A, C) quælibet æquè multiplices, quibuſlibet conſequentiũ (B, F) æquè multiplicibus, ſint vel ſimul maiores, vel ſimul minores, vel ſimul æquales, ratio (A ad B) rationi (C ad F) æqualis erit.

Si negas, ſit ratio A ad B maior ratione C ad F. Ergo per 1. lem. præced. poterunt antecedentium A, C ſumi tales æquè multiplices, item tales conſequentium B, F æquè multiplices, ut multipla antecedentis A excedente multiplum conſequentis B, multipla antecedentis C non excedat multiplum conſequentis F, quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim. Ergo &c.

In

In hac demonſtratione, vti & in ſequentibus ea ſolũ propoſitiones ex quinto libro adhibentur, quæ per ſe æquè ſunt manifeſtæ, atq; ipſa axiomata.

Theorema 3.

SI ſumi poſſint antecedentium (O, R) tales æquè multiplices, itemq; tales æquè multiplices conſequentiũ (Q, S,) vt multiplã antecedentis vnius (O) ſuperante multiplam conſequentis (Q,) multipla antecedentis alterius (R) nõ excedat multiplã ſui conſequentis (S;) erit ratio (O ad Q,) cuius antecedentis multiplex ſuperat multiplicem conſequẽtis, maior ratione alterâ (R ad S.) Fig. 24.

Rationes illas inæquales eſſe ſic oſtendo. Si eſſent æquales, quæcunq; antecedentium æquè multiplices (vt patet à fortiori ex lemmate primo) quibuſcunque æquè multiplicibus conſequentium vel ſimul maiores eſſent, vel ſimul minores, quod eſt abſurdum, quia euertit hypotheſim.

Quod autem Ratio O *ad* Q *maior ſit, cuius antecedentis multiplex ſuperat, ſic oſtendo. Si negas, ſit ratio* R *ad* S *maior ratione* O *ad* Q. *Ergo per theor. 1. tales accipi poſſũt antecedentiũ* R *&* O *æquè multiplices, talesq; itẽ æquè multiplices conſequentiũ* S *&* Q, *vt multiplã antecedentis* R *rationis*

tionis maioris excedente multiplā conſequentis S, multiplæ antecedentis O non excedat multiplam conſequentis Q: non autem tales (quod facilè ex 1. lem. oſtenditur) ut multipla O excedente multiplam Q multipla R non excedat multiplam S. Quod eſt abſurdum, cum euertat hypotheſim.

Theorema 4.

Fig. 25. *CVm proportio irrationalis eſt, nulla multiplex antecedentis ulli conſequentis multiplici æqualis eſſe poteſt. Quare, cum per multiplices inquiritur proportionū irrationalium æqualitas, ſolummodo multiplicium ſimultaneus exceſſus, defectuſq́; ſpectari debent.*

Sit proportio irrationalis A ad B. Si A aliquoties ſumpta poſſet fieri æqualis B aliquoties ſumptæ, ac proinde eandem ambæ efficere quantitatem Z: ſingulæ A & B eſſent eidem Z commenſurabiles, ac proinde & commenſurabiles inter ſe, contra hypotheſim.

Quia tamen ſecundum theorema tam ad rationales proportiones pertinet, quam ad irrationales, ſimultaneo exceſſui & defectui, æqualitatem ſimultaneam addidimus cum Euclide.

Demonſtratis hunc in modum, quæ ab Euclide def. 5. & 6. ponuntur, iam omnes eius quinti & ſexti libri demonſtrationes ſubſiſtunt: patetque multiplicium illum exceſſum defectumque ſimultaneum, infalli-

bile

bile indicium eſſe æqualitatis rationum, nō quidem per ſe immediatè, ſed demonſtratione, quam modo dedimus, priùs ritè intellectâ.

Verum quia indicium per multiplices, quantumuis iam ſecurum, nihilominus remotum eſt & implexum, hic aliud clariſſimum & proximum, quod promiſi ſupra, demonſtrabo.

Theorema 5.

SI conſequentes (CF, NQ) & conſequentium quælibet aliquotæ ſimiles (puta et decimæ et centeſimæ et milleſimæ, & ita deinceps ſine termino) in antecedentibus (AB, GM) æquali ſemper numero cōtineantur, rationes (AB ad CF; et GM ad NQ) æquales erūt. Fig. 26.

Nota æquali numero cōtineri dicuntur, cum, ſi auferantur quoties poſſunt, æqualis eſt vtrimq; numerus ablatarum.

Demonſt. Si negas, erit ratio alterutra, puta AB, ad CF, maior ratione GM ad NQ. Quoniã igitur AB ponitur ad CF maiorem habere rationem quam GM ad NQ, manifeſtum eſt aliquã (puta AD) minorem quàm AB, æqualē habere rationem ad CF, quã GM ad NQ. Manifeſtum ſimiliter eſt, aliquam ipſius CF aliquotam (ex. gr.

vnam trigeſimam) eſſe minorem differentia D B. Sit C E vna trigeſima ipſius C F, & auferatur ex A B quoties poteſt exemp. gr. millies, totumq; ablatum ſit A O. Quoniã igitur A O eſt 1000 CE, & CF eſt 30 CE, erit A O ad CF vt 1000 ad 30.

Sumatur iam ex N Q aliquota NP ſimilis alteri C E, nempe etiam vna trigeſima. Quoniam ex hyp. CE, NP æquali numero in A B, G M continentur, & CE ablata ex A B quoties potuit, ablata fuit millies, etiã N P ex G M auferri poterit millies. Quia ergo totum ablatum G K eſt 1000 NP, & N Q eſt 30 N P, erit G K ad N Q vt 1000 ad 30, hoc eſt vt A O ad CF. Quia vero C E ablata ex A B quoties potuit, reliquit O B, erit O B minus quam C E. Sed C E, nempè vna trigeſima C F, eſt minor poſita quã D B. Ergo O B eſt multò minor quam D B. Ergo A O eſt maior quam A D. Ergo A O ad CF maiorem rationem habet quam A D ad C F. Sed ponebatur eſſe A D ad C F, vt G M ad N Q. Ergo A O ad C F maiorem rationem habet, quam G M ad N Q: hoc eſt multò maiorem quam G K ad N Q. Quod eſt abſurdum, quia oſtendi ſupra A O eſſe ad C F vt G K ad N Q. Non poſſunt igitur rationes datæ A B ad C F & G M ad N Q eſſe inæquales. Æquales igitur ſunt. Quod erat demonſtrandum.

Theo-

Theorema 6.

SI aut conſequentes (C F, N Q) aut conſequentiũ aliquæ ſimiles aliquotæ (ex. gr. decimæ) inæquali numero in antecedentibus (A B, G M) contineantur, rationes (A B ad C F; et G M ad N Q) inæquales erunt, & erit illa maior, cuius conſequentis aliquota ſæpius continetur. Fig. 16.

Contineatur C E decima una ipſius C F, in A B millies, & ſit A O 1000 C E; tum vero reſiduum O B erit minus quam una C E. Deinde N P una decima N Q contineatur in G M tantum nongenties nonagies ſepties, & ſit G K 997 N P; patet reſiduum K M fore minus una N P, ac proinde 1000 N P fore maiores quam G M. Sit ergo G R, 1000 N P. Quoniam igitur A O eſt 1000 C E, & G R, 1000 N P; C F vero, 10 C E, & N Q, 10 N P; erit A O ad C F, ut G R ad N Q. Ergo A B eſt ad C F in maiori ratione, quam G R ad N Q; ac proinde in multo maiori, quam G M ad N Q. Quod erat demonſtrandum.

Habemus iam igitur indubitatum, facilliſmumque indicium, ex quo rationes æquales, inæqualeſque certò liceat diſcernere. Et poſſemus ex illo, omnes, quæ quidem axio-

mata non ſint, l. 5, propoſitiones, quas per multiplices Euclides demonſtrat, multò expeditius demonſtrare, niſi magis ex vſu diſcentium putaremus, illas eâ methodo, quâ in primâ parte vſi iam ſumus, proponere.

TERTIA PARS.

De proportionum denominatoribus, algorythmo, compoſitione.

I.

Proportionis Diuiſio.

Prima diuiſio eſt in rationalem & irrationalem, vt dictum def. 4. Vtraque diuiditur in rationē æqualitatis & inæqualitatis. Ratio inæqualitatis diuiditur in rationem maioris inæqualitatis, quæ habet antecedens maius conſequente, & in rationem minoris inæqualitatis, quæ habet antecedens minus conſequente.

Rationalis proportio inæqualitatis maioris diuiditur in quinq; ſpecies, quæ ſunt; multiplex, ſuperparticularis, ſuperpartiens, multiplex ſuperparticularis, multiplex ſuperpartiens.

Ratio multiplex eſt quando maior minorē aliquoties continet, vt bis, ter, quater &c. dicitur que ratio dupla, tripla, quadrupla.

Ratio ſuperparticularis eſt, quando maior minorem continet ſemel, & unam eius partem aliquotam: ut ratio 3 ad 2, vel 6 ad 4 quæ dicitur ſeſquialtera; quia maior minorem continet ſemel & eius dimidium: ratio 4 ad 3, ſiue 16 ad 12, quæ dicitur ſeſquitertia quia maior minorē continet ſemel, & tertiam eius partem, & ſic deinceps.

Ratio ſuperpartiens eſt, cum maior minorem continet ſemel, & plures eius aliquotas, non conficientes unam aliquotam. Talis eſt ratio 8 ad 5, vel 14 ad 10, quia 8 continet 5 ſemel, & inſuper 3, hoc eſt tres quintas eiuſdem numeri 5, quæ ſimul ſumptæ non conficiunt unā aliquotam ipſius 5. Similiter 14 continet 10 ſemel & bis 2, hoc eſt duas quintas numeri 10, quæ tamen ſimul ſumptæ (nempe 4) non conficiunt unam aliquotam ipſius 10. Additur porro, non conficientes unam aliquotam, quia aliàs eſſet ratio ſuperparticularis.

Ratio multiplex ſuperparticularis eſt, cum maior minorem aliquoties continet, & inſuper unam eius aliquotam, ut ratio 5 ad 2, 10 ad 4 &c.

Ratio multiplex ſuperpartiens eſt, cum maior minorē aliquoties continet, & inſuper plures eius aliquotas non conficientes unam aliquotam, ut ratio 8 ad 3, 16 ad 6 &c.

II.

De Denominatore Proportionis rationalis.

DEnominator proportionis rationalis eſt qui diſtinctè & clarè exprimit habitudinem vnius numeri ad alterum; ſiue qui ita ſe habet ad vnitatem, vt maior ad minorem, ac proinde oſtendit, quoties maior minorem contineat, & quoties minor contineatur à maiore. Rationi 27 ad 9 denominator eſt 3, quia 3 ita eſt ad vnitatem, vt 27 ad 9, ac proinde oſtendit quoties conſequens in antecedente continetur, nempe ter.

Cuiuſcunque rationis denominator inuenitur, ſi maior terminus diuidatur per minorem, nam quotiens diuiſionis erit denominator. Ratio eſt, quia quotiens ita eſt ad vnitatem, vt diuidendus ad diuiſorem, hoc eſt vt maior ad minorem.

Exempl. detur ratio 60 ad 6. Diuide 60 per 6; quotiens 10 eſt denominator. Detur rurſum ratio 60 ad 16, diuiſo 60 per 16 fit quotiens $3\frac{3}{4}$, hic eſt denominator.

III.

De Denominatoribus Proportionum irrationalium.

CVm rationes irrationales fuerint reductæ ad rationes commune conſequens habentes, communis conſequentis antecedentia, erunt rationum denominatores, & commune conſequens munus ac locum explet unitatis.

Proportionis nullius irrationalis, ſi ſola ſit, exhiberi poteſt denominator. At ſi duæ fuerint, vel plures proportiones irrationales, alio quodam ſenſu earum denominatores poterunt exhiberi, qui nimirum oſtendant, quomodo una ratio ad alterā ſe habeat. Id quod egregiè obſeruauit P. Gregorius à S. Vincentio, operis ſui Geometrici lib. 8. def. 2. Qui vir cum præclariſſimis, & propè innumeris inuētis Geometriā auxit; tum inprimis libro 8. eiuſdē operis de proportionalitatibus ita ſcripſit, ut nouā de proportionalitatibus ſcientiam condidiſſe cenſeri meritò debeat. Datæ ſint rationes irrationales A, ad B, & C, ad D, quæ reuocentur ad rationes FH, G H, habentes commune conſequens, H, ſic ut ratio F ad H, ſit par rationi A ad B, & ratio C ad D par rationi G ad H, cōmune conſequens H munus explebit unitatis, & antecedentia F, G erunt denominatores rationum F ad H, & G ad H (hoc eſt rationū A ad B, & C ad D,) quia oſtendunt quomodo Fig. 27.

modo una ratio ſeſe habeat ad alteram, ſicut enim F eſt ad G, ita ratio F H eſt ad rationem G H, hoc eſt ratio A B ad rationem C D.

IV.

Axiomata.

Fig. 28. AX. 1. Rationes (F ad H, & G ad H) communem habentes conſequens (H) eam inter ſe proportionem habent, quam antecedentia (F, G.) eſt prop. 2. P. Gregorij à S. Vinc. l. 8. quadr.

Hoc eſt ratio G, ad H, tanto maior eſt ratione F ad H, quanto G maior eſt quam F.

Fig. 29. Ax. 2. Rationes (I ad L & I ad M) communem habentes antecedens, reciprocam inter ſe habent conſequentium proportionem, eſt propoſ. 7. P. Gregorij à S. Vinc. lib. 8. quadr.

Hoc eſt ratio I ad L eſt ad rationem I ad M, ut reciprocè eſt M conſequens, ad conſequens L: ſiue ratio I ad L tantò maior eſt ratione eiuſdem I ad M, quantò L fuerit minor, quam M, ac proinde quanto M fuerit maior quam L.

Ax. 3. Rationes rationales eam inter ſe rationẽ habent, quã denominatores. Patet ex axiom. 1.

Dentur ratio 12 ad 3, & ratio 15 ad 6, quorum denominatores ſunt 4 & $2\frac{1}{2}$. Ex a defin. 2 denom. ratio 12 ad 3 eſt eadẽ cum ratione 4 ad 1, & ratio 15 ad 6 eſt eadẽ cum ratione $2\frac{1}{2}$ ad 1. Sed ratio 4 ad 1 eſt ad rationẽ $2\frac{1}{2}$ ad 1, ut b 4 eſt ad $2\frac{1}{2}$. Ergo etiam ratio 12 ad 3 eſt ad rationem

a Num. 2.

b Per axio. 1. hic.

nem 15 ad 6, ut denominator 4 eſt ad denominatorem $2\frac{1}{2}$.

V.

Rationum rationalium Additio & Subtractio.

Additio perficitur, ſi rationum denominatores addantur. Ratio enim quam habet denominatorum ſumma ad unitatem, eſt rationum datarum ſumma quæſita.

Dentur ratio 12 ad 3 & 15 ad 6, earum denominatores 4 & $2\frac{1}{2}$ additi ſibi mutuo faciunt $6\frac{1}{2}$. Ratio $6\frac{1}{2}$ ad 1 eſt par rationi 12 ad 3 & rationi 15 ad 6. Patet ex Ax. 1. & 3. Fig. 30.

Subtractio fit ablatione minoris denominatoris à maiore, nam ratio reſidui ad unitatẽ, eſt ratio quæ remanet poſt minorem rationem à maiori detractam. Patet ex axiom. 1. & 3.

Dentur rationes 12 ad 3, & 15 ad 6. Harum denominatores ſunt 4 & $2\frac{1}{2}$. Aufer minorẽ $2\frac{1}{2}$ à maiori 4, remanent $\frac{3}{2}$: ratio $\frac{3}{2}$ ad 1, eſt ea quæ remanet, ubi rationem 15 ad 6 ſeu $2\frac{1}{2}$ ad 1 detraxeris ex ratione 12 ad 3, ſeu 4 ad 1.

VI.

Rationum irrationalium Additio & Subtractio.

Fig. 31.

RAtiones datæ (A ad B, & C ad D) reducantur ad rationes (F ad H & G ad H) habentes commune conſequens (H.) Antecedentia F & G ſibi addita ſunt F G. Ratio F G ad H eſt ſumma rationum E ad H, & G ad H; hoc eſt rationum A ad B & C ad D. Patet ex axio. 1.

Subtractio perficitur, ſi rationes datæ ad commune conſequens reducantur, ac tum minus antecedens G auferatur à maiori F; ratio enim reſidui ad H, eſt ea quæ remanet poſtquam rationem G ad H, ſeu C ad D ſubtraxeris à ratione E ad H, ſeu A ad B. Patet ex 1. axiom.

VII.

Rationum rationalium multiplicatio & Diuiſio.

DEnominatores rationum per inuicem multiplicati dabunt denominatorē rationis, quæ ex datarū rationum multiplicatione producitur.

Hoc eſt ratio quam ad vnitatem habet numerus ex denominatorū multiplicatione productus, eſt ea quæ fit ex rationum multiplicatione. Patet

ex Ax. 1 & 3. Nam multiplicatio rationum eſt unius ad alteram additio ſæpius repetita. Hanc autem perfici repetitâ ſæpius antecedentium additione (hoc eſt multiplicatione) patet ex iam citatis axio. 1 & 3.

Sint datæ rationes 9 ad 3 & 20 ad 4, denominatores 3 & 5 multiplicati faciunt 15. Ratio 15 ad 1 eſt ea, quæ ex multiplicatione rationum 9 ad 3 (ſeu 3 ad 1) & 20 ad 4 (ſeu 5 ad 1,) producitur. Fig. 32.

Diviſio rationum perficitur, ſi denominator maioris dividatur per denominatorem minoris. Nam ratio quotientis ad unitatem, eſt ea, quæ habetur ex diviſione rationis datæ maioris per rationem minorem. Patet ex 1 & 3 axiomate. Cum rationis per rationem diviſio, ſit ſubtractio unius ab alterâ ſæpius repetita.

VIII.

Multiplicatio rationum irrationalium.

Datæ ſint rationes A ad B, & C ad D, per invicem multiplicandæ. Fiat ut A ad B, ita D ad E. Ratio C ad E eſt ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Fig. 33.

Hæc operatio eſt Gregorij à S. Vincentio, lib. 8. prop. 75. Sed eam nec ipſe, nec alius quiſquam demonſtrat.

Hunc

Hunc igitur in modum demonſtrabitur. Ratio C ad E producitur ex multiplicatione rationum C ad D, & D ad E, ut patebit ex demonſtratione numeri 12, ab his independente. Sed rationes C ad D, & D ad E per conſt. ſunt rationes G ad D, & A ad B. Ergo ratio C ad E eſt ea quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & G ad D. Quod erat demonſtrandum.

IX.

Diviſio rationum irrationalium.

Fig. 37

Data ſit ratio C ad E dividenda per rationem A ad B. Fiat ut A ad B, ſic C ad D. Ratio D ad E eſt quotiens.

Nam ratio C ad D (hoc eſt per conſt. ratio A ad B) multiplicata per rationem D ad E producit rationem C ad E, ut patebit ex demonſtratione num. 12, ab his independente. Ergo ratio D ad E eſt quotiens, cum multiplicata in diviſorem, qui eſt ratio A ad B, reſtituat rationem C ad E, quæ proponebatur dividenda.

X.

De Compoſitione rationum, eius Definitio.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates (hoc eſt denominatores)

inter

per ſe multiplicatæ aliquam effecerint ratio-nem: Eſt definitio 5. l. 6. Euclidis.

Dentur rationes quotcumque quarum denominatores ſint 2, 3, $1\frac{1}{2}$. Multiplica denominatorem 2 per 3 denom. fit 6 denominator rationis cõpoſitæ ex rationibus, quarum denominatores ſunt multiplicati. Hoc eſt ratio 6 ad 1 eſt compoſita ex rationibus 6 ad 3, & 12 ad 4. Quod ſi denominatorem 6 multiplices per denominatorem tertium $1\frac{1}{4}$, fit $7\frac{1}{2}$ denominator rationis compoſitæ ex tribus datis rationibus, quarum denominatores ſunt 2, 3, $1\frac{1}{4}$. Fig. 34.

XI.

Compoſitio rationum non aliud eſt, quam rationum multiplicatio: & ratio omnis ex iiſdem rationibus componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

Nam ut patet ex axiomatis n. 4. & ex n. 7. ratio, quæ ex plurium rationum multiplicatione producitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatẽ, ſeu conſequens commune. Atqui etiã per defin. Euclid. ratio, quæ ex pluribus rationibus cõponitur, ea eſt, quã quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem ſeu conſe-

Hunc igitur in modum demonſtrabitur. R… C ad E producitur ex multiplicatione ratio… C ad D, & D ad E, ut patebit ex demonſtra… numeri 12, ab his independente. Sed ra… ad D, & D ad E per conſt. ſunt rationes C … & A ad B. Ergo ratio C ad E eſt ea quæ … multiplicatione rationum A ad B, & C … Quod erat demonſtrandum.

IX.

Diviſio rationum irrationalium

Fig. 32.

D*ata ſit ratio C ad E dividenda per ratio… A ad B. Fiat ut A ad B, ſic C ad D. Ra… D ad E eſt quotiens.*

Nam ratio C ad D (hoc eſt per conſt. rati… ad B) multiplicata per rationem D ad E produ… rationem C ad E, ut patebit ex demonſtrati… num. 12, ab his independente. Ergo ratio D ad … eſt quotiens, cum multiplicata in diviſorem, qui… ratio A ad B, reſtituat rationem C ad E, quæ pr… ponebatur dividenda.

X.

De Compoſitione rationum, eius Definitio.

R*atio ex rationibus componi dicitur, cum … tionum quantitates (hoc eſt denominatio… qu…*

XII.

Si fuerint quæcunque & quotcunque quantitates, ſeu magnitudines, ſeu numeri; ratio primæ ad vltimam componitur ex rationibus mediarum.

In numeris demonſtratum eſt à Theone, Eutocio, & Vitellione. Qui in magnitudinibus demonſtraret, nemo hactenus inuentus eſt. Vnde Gregorius à S. Vincentio, magnus Geometra, libro 8. ad principium ſecundum, cenſet inter principia numerandum eſſe, donec alicui demonſtratio occurrerit, quâ inter theoremata referri poſſit.

Vniuerſalem igitur huius rei demonſtrationem dare conabimur hunc in modum.

Demonſtratur in magnitudinibus.

Datæ ſint magnitudines quæcunq; & quotcunque A, B, C, D. Oſtendendum eſt rationem A ad D componi ex rationibus A ad B; B ad C; C ad D. Fig. 35.

Fiat vt B ad C, ita X ad B. Eruntq; rationes A ad B: B ad C reductæ ad rationes A ad B, X ad B, habentes communẽ conſequens B, ac proinde rationum denominatores ſunt A, X & conſequens commune B a munus explet vnitatis, quæ eſt commune a Per n. 3.

imum conſequens reſpectu omnium denominatorum numericorum.

b Schol. præced.

Itaque ſi velimus magnitudines A, X per inuicem multiplicare, oportebit b facere ut B unitas eſt ad X, ita A ad quartã Z, quæ erit productum multiplicationis A per X, ſeu X per A; planè ac ſi cupias inuicem multiplicare numeros R, S, ut unitas ad unum numerũ S, ita alter R ad quartum V, qui eſt productum multiplicationis.

c Per deſin. num. 10.

Quoniam igitur quantitas Z eſt productum ex multiplicatione denominatorum A, X, erit ratio c huius producti Z ad B unitatẽ ſeu communem conſequens, ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B; X ad B; prorſus ut in rationum numericarum multiplicatione, numero 7 oſtendimus euenire, in qua ſi denominatores inter ſe multiplicentur, ratio producti ad unitatem ea eſt, quæ fit ex rationum multiplicatione.

Atqui per conſtr. ratio X ad B eſt ratio B ad C. Ergo etiã ratio Z ad B producitur ex multiplicatione rationũ A ad B; B ad C. Quia vero per cõſtr. ut B eſt ad X, ita A eſt ad Z, etiam inuerſim Z ad A, ut X ad B, hoc eſt per conſtr. ut B ad C. Igitur permutando ut Z eſt ad B, ita A eſt ad C. Sed iam oſtenſum rationem Z ad B produci ex multiplicatione rationum A ad B; B ad C. Ergo etiam ratio A ad C producitur ex multiplicatione rationũ A ad B; & B ad C. Atqui num. XI. oſtenſum eſt rationes componi ex iiſdem rationibus, ex quarum multiplicatione producuntur. Ergo ratio A ad

ad C componitur ex rationibus A ad B, & B ad C.

Eodem modo demonſtrabitur ratio A ad D componi ex rationibus A ad C, & C ad D. Ergo ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D. Et ſic deinceps in infinitum. Quod erat demonſtrandum.

Demonſtratur in numeris.

EAndem prorſus demonſtrationem valere in numeris iam oſtendam, unde etiam veritas illius, ac ſoliditas magis ſtabilietur.

	$\frac{8}{3}$	
8	2	$\frac{4}{3}$
4	1	
3	$\frac{3}{4}$	

Dati ſint tres numeri quicumque exem. gr. 8, 4, 3. Fiat ut 4 ad 8. ita 1. ad 2. & ut 4. ad 3. ſic 1. ad $\frac{3}{4}$. Erunt igitur rationes 8 ad 4 & 2 ad 1. item rationes 4 ad 3. & 1 ad $\frac{3}{4}$. inter ſe æquales; eritq; ex æquo a etiam ratio 8 ad 3 æqualis rationi 2 ad $\frac{3}{4}$. a Per 22. L5.

Fiat deinde, ut $\frac{3}{4}$ ad 1. ita 1 ad $\frac{4}{3}$: eruntq; rationes 2 ad 1. & 1. ad $\frac{3}{4}$ (hoc eſt rationes 8 ad 4 & 4 ad 3.) reducta ad duas rationes 2 ad 1 & $\frac{4}{3}$ ad 1. habentes commune conſequens unitatem; ac proinde 2 & $\frac{4}{3}$ erunt b rationum 8 ad 4. & 4 ad 3 denominatores. Multiplicentur iam per inuicem denominatores 2 & $\frac{4}{3}$ hoc eſt fiat ut 1 ad $\frac{4}{3}$. ita 2 ad $\frac{8}{3}$. Erunt $\frac{8}{3}$ productum ex 2 & $\frac{4}{3}$ denominatoribus rationum 8 ad 4. & 4 ad 3. inter ſe multiplicatis. Ergo ratio huius pro-

b Patet ex num. 2.

iterũ conſequens reſpectu omnium denomi-
rum numericorum.

Itaque ſi velimus magnitudines A, X per
ictim multiplicare, oportebit b facere ut B
eſt ad X, ita A ad quartã Z, quæ erit prod
multiplicationis A per X, ſeu X per A: ſi ſpl
cipias inuicem multiplicare numeros R, S,
vnitas ad vnum numerũ S, ita alter R ad q
tum V, qui eſt productum multiplicationis.

b Schol. præced.

Quoniam igitur quantitas Z eſt produ
ex multiplicatione denominatorum A, X, e
tio c huius producti Z ad B vnitatẽ ſeu co
conſequens, ea, quæ producitur ex multipli
rationum A ad B; X ad B; prorſus vt in r
numericarum multiplicatione, numero 7
diximus eueniri, in qua ſi denominatores inu
multiplicentur, ratio producti ad vnitatem
quæ fit ex rationum multiplicatione.

c Per defin. Num. 10.

Atqui per conſtr. ratio X ad B eſt ratio B a
Ergo etiã ratio Z ad B producitur ex multipli
tione rationũ A ad B; B ad C. Quia vero per c
vt B eſt ad X, ita A eſt ad Z, etiam inuerſum Z
A, vt X ad B, hoc eſt per conſtr. vt B ad C. Ig
permutando vt Z eſt ad B, ita A eſt ad C. Sed i
oſtenſum rationem Z ad B produci ex multipli
tione rationum A ad B; B ad C. Ergo etiam ra
A ad C producitur ex multiplicatione rationũ
ad B; & B ad C. Atqui num. XI. oſtenſum eſt r
tiones componi ex iiſdem rationibus, ex qu
rum multiplicatione producuntur. Ergo ratio

XIII.

Si dentur quotcumque rationes, A ad B, C ad D, E ad F: Exhibebitur ratio ex omnibus compoſita. Fig. 36.

SI fiat vt A ad B, ita quæpiam G ad H, & vt C ad D, ita H ad I, & vt E ad F, ita I ad K: ratio enim G ad K erit compoſita ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K, vt num. præced. demonſtrauimus, hoc eſt per conſtr. ex rationibus datis A ad B, C ad D, E ad F.

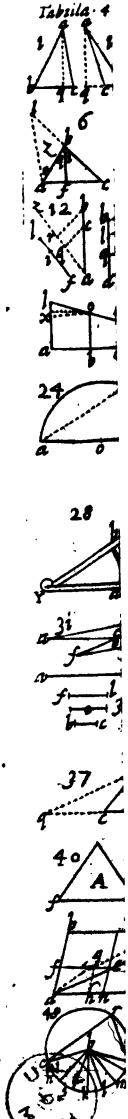
XIV.

Ratio non eſt æqualis rationibus ex quibus componitur.

INter duas quantitates G, K, aliæ quantitates interponantur, ſiue illæ ſint continuè proportionales ſiue non: ratio primæ G ad vltimã K non eſt æqualis rationibus intermediis G ad H, H ad I, I ad K, licet ex iis ſit compoſita. Nam ex iis componi idem eſt, quod produci ex earum multiplicatione mutua, vt oſtenſum eſt num. XI. Cum igitur ratio G ad K ſit producta ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K inter ſe multiplicatis, vt ex demõſtratione num. 12. patet, nõ poſſunt rationes G ad H, H ad I, I ad K ſimul ſumptæ æquales eſſe rationi G Fig. 36.

ad K, niſi cum per accidens rationum additio & multiplicatio eandem effecerint rationem. Vt igitur rationibus dictis habeatur vna æqualis, erunt illæ ſibi mutuo addendæ, vt traditur num. 5. & 6. ex qua additione proueniet ratio illis omnibus æqualis; quæ ferè ſemper, vt dixi, erit diuerſa ab illa, quæ ex earundem rationum compoſitione, hoc eſt multiplicatione exſurget.

Tabula 4



ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

LIBER VI.

PRoportionũ doctrina libro quinto vniuerſim expoſita, in ſexto figuris planis applicatur. Et ſunt quæ hoc libro traduntur adeò ſcitu neceſſaria, vt ſine illis arcana Geometriæ penetrare, fructuſq́; ſuaues Matheſeos percipere nemo poſſit. Ad propoſitiones propè ſingulas oporteret encomium texere; tanta omnium vtilitas eſt.

DEFINITIONES.

1. SImiles figuræ ſunt, quæ & ſingulos angulos ſingulis æquales habent, & latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, vel quæ inter æquales angulos exiſtunt, vel quę ſunt circa æquales angulos (Eodem omnia recidunt) proportionalia.

Vt triangula X, Z dicentur ſimilia, ſi angulus A ſit æqualis angulo F, & angulus B, angulo L, & angulus C angulo I: atq; inſuper ſi AB ſit ad FL, vt BC ad LI; & BC ad LI, vt CA ad IF; & CA ad IF, vt AB ad FL; Comparãdo ſemper la- Fig. 7. l. 6. tabulá 4.

tera æqualibus angulis oppoſita. Eodem modo aliarum figurarum rectilinearum omnium ſimilitudo explicabitur.

Fig. 29. 2. Reciprocæ figuræ ſunt, cum in vtraque antecedentes & conſequentes rationum termini fuerint.

Vt in parallelogrammis X, Z,

ſi AC ſit ad CB,

vt FC ad CL

antecedentia ſunt AC & FC, quorum in vtrâque figurâ vnum eſt; & conſequentia ſunt CB & CL, quorum ſimiliter in quâque figurâ vnum eſt; parallelogramma proinde X, Z, reciproca dicuntur. Idem de alijs figuris intellige.

3. Altitudo figuræ eſt perpendicularis à vertice ad baſim deducta. Eſt Euclidi 4.

Fig. 1. *Vt trianguli ABC altitudo eſt perpendicularis AQ, à vertice cadens in baſim BC, vel intra triangulum, vel extra in baſim protractam. Baſis autem & vertex aſſumuntur ad libitum.*

4. Similes arcus circulorum dicuntur, qui eandem habent ad totas ſuas circumferentias rationem.

Vt ſi ambo ſint ſuæ circumferentiæ pars tertia, vel quarta &c.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 2. T*Riangula (ABC, DEF) et parallelogramma) AOPC, DQRF) quæ eam-*

eandem habent altitudinem, ſiue inter eaſdem exiſtunt parallelas, eam inter ſe proportionem habent, quam baſes (A C, D F.)

Ab hoc theoremate dependet totus ſextus liber, imò quidquid vſpiam de figuris ſiue planis, ſiue ſolidis per proportiones demonſtratum eſt. Demonſtrat illam Euclides per multiplices, quæ in primo ſtatim aditu huius libri tyrones perturbant. Aliam igitur demonſtrationem dabimus facillimam ex theor. 5. partis ſecundæ lib. 5. hunc in modum.

Sumatur baſeos D F quæuis pars aliquota, ex.gr. D G vna tertia, & ducatur recta G E, erit etiam triangulum D E G tertia pars trianguli D E F, vt colligitur ex 38. l. 1. Quare recta D G & triangulum D G E ſunt conſequentium [a] ſimiles aliquotæ. Auferatur deinde D G ex baſi A C quoties poteſt, puta ſexies, ducanturque rectæ H B, I B, K B, L B, M B, N B. Quoniam C H, H I &c. æquales ſunt ſingulæ ipſi D G, etiam ſex triangula C B H, H B I &c. triangulo D E G æqualia [b] erunt ſingula. Ergo quoties D G cõtinetur in antecedente A C, toties triangulum D E G continetur in antecedente A B C. Eodem diſcurſu

a Per defin. 7. l. 5.

b Per 38. l. 1.

oſtendam quaſcunque conſequentium (baſeos D F & trianguli D E F) ſimiles aliquotas in antecedentibus, (baſi A C & triangulo A B C,) æquali numero contineri. Ergo per theor. 5. partis ſecundæ lib. 5. vt baſis A C ad baſim D F, ita triangulum A B C ad triangulum D E F. Quod erat demonſtrandum.

Quoniam vero parallelogramma A P, D R ſunt dupla *c* triangulorum A B C, D E F; etiam illa erunt inter ſe vt baſes.

c Per 41. l. 1.

Corollarium.

Fig. 3.

TRiangula (A B C, F I L) & parallelogramma, æquales baſes (A C, F L) vel eandem, habentia, eam inter ſe rationem habent quam altitudines (B O, I Q.)

Fiant enim Q S, O R æquales æqualibus baſibus F L, A C. Erunt igitur etiam Q S, O R inter ſe æquales. Duc S I, R B. Si in triangulis O B R, Q I S accipiantur B O, I Q, tanquam baſes, erunt O R, Q S, eorum altitudines; quæ cum ſint æquales, erunt triangula O B R, Q I S inter ſe, vt *a* baſes B O, I Q. Sed quia ex conſtr. O R par eſt A C, & Q S par F L, triangula O B R, Q I S æquantur *b* triangulis A B C, F I L. Ergo etiam triangula A B C, F I L ſunt inter ſe vt B O ad Q I.

a Per 1. l. 6.

b Per 38. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO II.

SI ad vnum trianguli latus (B C) ducta fuerit (F L) parallela, hæc ſecabit proportionaliter latera, (hoc eſt A F erit ad F B, vt A L ad L C.) Fig. 4.

Et ſi recta (F L) ſecuerit latera (B A, C A) proportionaliter, erit ad reliquum latus (B C) parallela.

Pars 1. Ducantur B L, C F. Quoniam F L ponitur parallela B C, erunt triangula F B L, L C F, eamdem baſim F L habẽtia, inter *a* ſe, æqualia. Ergo triangulum X, ad vtrumque eandem *b* habet rationem, hoc eſt trianguli X eſt ad triang. F B L, vt triangul. Idem X eſt ad triang. L C F. Sed triangulum X eſt ad triang. F B L, vt *c* A F ad F B; & triangulũ X eſt ad triang. L C F, vt *d* A L ad L C. Ergo *e* etiam A F eſt ad F B vt A L ad L C. Quod erat demonſtrandum.

a *Per 37. lib. 1.*
b *Per 7. l. 5.*
c *Per præc.*
d *Per eand.*
e *Per 11. l. 5.*

Pars 2. Vt A F eſt ad F B, ita triangulũ X *e* eſt ad triangulum F B L; & vt A L eſt ad L C, ita *f* triangulũ X eſt ad triang. L C F. Sed iam ponitur A F ad F B, vt A L eſt ad L C. Ergo triang. X eſt *k* ad triang. F B L, vt idem X eſt ad L C F. Ergo *g* triangula F B L, L C F, eandem habentia baſim, æquan-

e *Per præc.*
f *Per eand.*
k *Per 11. l. 5.*
g *Per 9. l. 5.*

i Per 39.l.1. æquantur. Ergo F L, B C; ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

Fig. 5. SI ad vnum trianguli latus (B C) ductæ fuerint plures parallelæ (I O, F L,) erunt omnia laterum ſegmenta, proportionalia.

Ducatur F Q parallela A C. Rectæ F S, a Per 34.l.1. S Q æquantur a L O, O C. Sed B I eſt ad b Per 2.l.6. I F, vt b Q S ad S F. Ergo etiam B I eſt ad I F, vt C O ad O L.

PROPOSITIO III.

Fig. 6. *SI recta (B F) angulum trianguli bifariam ſecans, etiam ſecet baſim (A C,) habebunt baſis ſegmenta (A F, F C) eandem proportionem quam reliqua latera (A B, C B.)*

Et ſi baſeos partes (A F, F C) eandem rationem habuerint quam reliqua latera (A B, C B) recta (B F) baſim ſecãs, angulum oppoſitum (A B C) biſecabit.

Pars 1. Produc C B, donec B L ſit par B A, & iunge A L. Quoniam in triangulo a Per 5.l.1. Z, latera L B, A B æquantur, anguli a quoque L & O æquales erunt. Quia igitur ex-

ternus

ternus A B C duobus *b* internis L,O æqualis eſt; angulus I,qui per hyp. ipſius A B C dimidius eſt, æquabitur angulo, L. Ergo A L,F B ſunt *c* parallelæ.Ergo in triangulo A C L, A F eſt ad F C,*d* vt L B(hoc eſt A B)ad B C. Quod erat demonſtrandum. b Per 32.l.1. c Per 29.l.1 d Per 2.l.6.

Pars 2. Produc iterum C B donec L B ſit par A B. Quoniam ponitur vt A F eſt ad F C,ita A B (hoc eſt L B) eſſe ad B C, erunt A L,F B *e* parallelæ. Ergo externus I,eſt par *f* interno, L,& alternus Q æqualis alterno O.Sed quia L B,A B æquales ſunt, anguli *o* L & O ſunt æquales.Ergo etiam I & Q æquales ſunt.biſectus ergo eſt A B C. Quod erat demonſtrandum. e Per 2.l.6. f Per 27.l.1. o Per 5.l.1.

PROPOSITIO IV.

Triangula ſibi mutuo æquiangula, ſunt ſimilia ; hoc eſt, o etiam latera æqualibus angulis oppoſita,habent proportionalia. o Def.1.l.6.

IN triangulis X,Z, angulus A ſit par angulo F,& angulus C ãgulo L,& angulus B angulo I. Dico A B eſſe ad F I, vt A C ad F L;& A C eſſe ad F L,vt C B ad L I; & C B eſſe ad L I, vt B A ad F I. Fig.7.

Dem.ſi angulus F ponatur ſupra ſibi æqualem A,latera F I, F L, cadent ſupra latera Fig.7.& 8.

a Fig. 8. Sola. tera A B, A C. Et quia *ſ* angulus externus A I L per hypoth. par eſt interno B, erunt *a* I L, B C parallelæ. Ergo *b* B I eſt ad I A, vt C L ad L A. Ergo *c* componendo B A eſt ad I F vt C A ad L F. Quod ſi angulus L imponatur Angulo C, eodẽ modo oſtendam A C eſſe ad F L, vt B C ad I L: & ſi angulus I, imponatur angulo B, oſtendetur pari modo, B C eſſe ad I L, vt A B ad F I. Liquet ergo propoſitum.

a Per 29. l. 1.
b Per 2. l. 6.
c Per 18. l. 5.

Corollaria.

Fig. 8. 1. SI in triangulo ducatur vni lateri (B C) parallela (L I) erit triangulum L F I ſimile toti C F B; ac proinde C F eſt ad L F, vt B C ad L I.

Nam quia L I, B C, parallelæ ſunt, erunt *q* externi F I L, F L I, pares internis B & C: F verò vtrique triangulo eſt communis. Ergo ſunt æquiãgula. Ergo latera C F, L F oppoſita æqualibus angulis B & F I L, ſunt *r* proportionalia lateribus B C, L I, quæ opponuntur communi angulo F.

q Per 27. l. 6.
r. Per præc.

Fig. 9. 2. Si in triangulo parallelas A C, L O ſecet recta B F, ab angulo oppoſito B ducta, ſecabit eas proportionaliter.

Nam per coroll. 1. A F eſt ad L I, vt F B ad I B; & F C quoq; eſt ad I O, vt F B ad I B. Ergo A F eſt ad L I vt *d* F C ad I O.

d Per 11. l. 5.

Igi-

igitur permutando A F eſt ad F C c vt L I c Per 16. l. 5.
I O.

PROPOSITIO V.

SI duo triangula habuerint omnia latera ſibi mutuo proportionalia etiam ſibi mutuo æquiangula erunt. Fig. 14.

Hoc eſt, ſi A B ſit ad R F, vt A C ad R Q; & vt A C ad R Q, ſic C B ad Q F; & vt C B ad Q F, ſic A B ad R F; dico angulos antecedentibus oppoſitos æquari angulis, qui opponuntur conſequentibus. Nimirum C ipſi I; B ipſi F; A ipſi O.

Ang.	Antec.	Conſeq.	Ang.
C.	A B	R F	I
B	A C	R Q	F
A	C B	Q F	O

Angulis A & C ſint æquales X & Z; & latera coeant in N. Etiam igitur b B & N æquales erunt. Quia ergo triangula P, T, ſunt æquiangula, erit o A B ad R N, vt A C ad R Q. Sed ex hyp. etiam eſt A B ad R F, vt A C ad R Q: Ergo A B eſt ad R F, vt eadem A B ad R N. Ergo R N, R F æquantur. Pari modo oſtendam æquari Q N & Q F. Triangula igitur T, S, ſibi mutuo ſunt æquilatera. Igitur anguli I, F, O æquan-

b Per coroll. 9 p. 32. l. 1.

o Per præc.

c Per 9. l. 5.

ꝺ Per 8. l. 1. æquantur ꝺ angulis Z, N, X, (hoc eſt per conſtr.) angulis C, B, A. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 10.

SI duo triangula (P, S) habeant vnū angulum (A) æqualem vni (O) & latera (A B, A C; R F, R Q) quæ æquales angulos continent, proportionalia; triangula erunt ſimilia.

Angulis A, C fiant æquales X, Z, & latera coëant in N. Igitur anguli quoque ᵉ B & N æquales erunt. Oſtendam, vt in præcedenti, æquales eſſe R F, R N. Eſt vero R Q vtriſque triangulis S, T communis; Anguli quoque O & X æquales ſunt, quia æquantur ambo eidem A; X per conſt. O per hyp. Ergo etiam I & F ᵒ æquantur ipſis Z & N. Triangulum igitur, S, æquiangulum eſt triangulo T; hoc eſt per conſtr. triangulo P, Ergo S, P ᵈ ſimilia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

e Per coroll. 9. p. 32. l. 1.

o Per 4. l. 1.

d Per 4. l. 6.

PROPOSITIO VII.

VIx vllius eſt vſus.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

IN triangulo rectangulo perpendicularis (B C) ab angulo recto in baſim ducta ſecat triangulum in partes toti, & inter ſe ſimiles.

In triangulis A B F, & L, angulus F cõmunis eſt, anguli vero A B F, & X per hypotheſim ſunt recti, adeoq; æquales. Ergo reliqui A & O etiam a æquales erunt. Ergo b triangula A B F & L ſimilia ſunt. Eodem modo ſimilia oſtendã eſſe, triangula A B F & R, angulumque I, parem angulo F. Ex quo iam patet etiam R & L ſimilia eſſe, cum æquales ſint anguli I & F: O & A: V, & X. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 11.

a *Per coroll. 9 p. 36. l. 1.*

b *Per 4 l. 6.*

Corollaria.

PRimo B C eſt media proportionalis inter A C, C F.

Cum enim ſint in triangulis R & L

æqu. ang. I. F.	æqu. ang. A. O
lat. opp. A C. C B	lat. opp. C B. C F.

Patet c A C eſſe ad C B, vt C B eſt ad C F.

c *Per 4 l. 6.*

2. B F eſt media proportionalis inter A F & C F. Item A B eſt media inter F A, & C A.

Nam in triangulis A B F & L ſunt

æqu.

æqu. ang. A B F. X.	æqu. ang. A. C.
lat. opp. A F. B F.	lat. opp. B F. C F.

d Per æqu. Ergo A F eſt d ad B F; vt B F ad C F. Similiter quia in triangulis A B F, & R

æqu. ang. A B F. V	æqu. ang. F. I.
lat. opp. A F. A B	lat. opp. A B. A C.

Erit rurſum AF ad A B, vt A B ad A C.

PROPOSITIO IX.

Fig. 12. *DAtam rectam (A B) diuidere ſecundum datam proportionem (F I ad I L.)*

Ducatur infinita A Z. Ex qua ſume A Q. Q R æquales F I, I L. Ex R duc R B. Huic ex Q duc Q C parallelam. Dico factum.

Patet ex p. 2. l. 6.

PROPOSITIO X.

Fig. 13. *DAtam rectam (A B) ſimiliter ſecare, vt altera data (A I) fuerit ſecta (in F, C.)*

Extremitates ſectæ & inſectæ iungat recta I B. Huic ex punctis F, C duc parallelas rectæ ſecundæ A B occurrentes in L, & Q. Dico factum.

Patet ex corollario p. 2. l. 6.

Scholium.

EX hac propoſitione diſcemus rectam datam in quotuis æquales partes ſecare. Cum recta ſecanda A B, facito quemuis angulum recta quæpiam infinita, ex qua circino cape tot æquales partes A C, C F, F I, in quot ſecare placuerit A B. Duc rectam I B, eiq; parallelas F L, C Q. Dico factum. Fig. 13.

Aliter idem & facilius efficiemus cum Maurolyco hunc in modum: Sit A B triſecanda. Duc ad A B parallelam I X infinitam, ſupra vel infra. Ex I X, ſi eſt infra A B, cape circino tres æquales partes I Q, Q R, R S, quæ ſimul maiores ſint quã A B, minores vero, ſi I X eſt ſupra. Per I & A, item per S & B duc rectas, quæ concurrant in C. Ex C ad Q & R, ductæ rectæ datam A B triſecabunt. Demonſtratio patet ex corall. 2. propoſ. 4. Fig. 14.

Rurſum cum Maurolyco aliter idipſum ita obtinebimus. Sit quatriſecanda A B. Duc infinitam A X, eiq; parallelam B Z etiam infinitam. Ex his cape circino partes æquales A L, L O, O Q, & B V, V S, S R, in ſingulis nempe una pauciores, quã deſiderentur in A B, tum rectæ ducantur L R, O S, Q V. Hæ quatriſecabunt datam A B. Fig. 15.

Nam quia per conſtr. L O, R S parallelas & æquales, iungunt L R & O S, etiã hæ erunt a parallelæ. Pari modo O S, Q V ſunt parallelæ. Ergo cum A Q ſit ſecta in tres æquales partes, etiã erit A I ſecta b in tres æquales. Similiter erit B C ſe-

a Per 33. l. 1.

b Per corol. p. 2. l. 6.

ſecta in tres æquales, tota igitur A B ſecta eſt in quatuor æquales.

Hæ duæ praxes ſunt faciliores Euclidæâ, quia pauciores ducendæ ſunt parallelæ.

PROPOSITIO IX.

Fig. 16. *DAtis duabus rectis (A B, B C) tertiam proportionalem inuenire.*

Duc rectam A C. Ex B A producta accipe A F parem B C. Per F ad A C duc parallelam F X infinitam; cui in L occurrat producta B C. Dico A B eſt ad B C, vt B C ad C L.

c Per 2. l. 6. Nam A B eſt ad A F, c vt B C ad C L.
d Per conſtr. Sed A F eſt d par B C. Ergo A B eſt ad B C, vt B C ad C L, adeoq; C L eſt tertia proportionalis quæ petebatur.

Aliter.

Fig. 17. STatuantur A B, B C ad angulum rectū. Iunge A C. Ex C duc C X perpendicularem ad A C infinitam, cui in L occurrat A B producta; Dico A B eſt ad B C, vt B C ad B L. Patet ex coroll. 1. prop. 8.

Scholium.

POterit verò proportio data non ſolùm per tres terminos, ſed etiā per infinitas continuari, &

tota

tota infinitorum proportionalium terminorum ſumma exhiberi. Pulcherrimè hanc rem, totumq; adeò Geometricæ progreſſionis negotium Gregorius à S. Vincentio proſecutus eſt toto libro 2. ſui operis; Nos in gratiam ſtudioſorum ſuccinctam rei propoſitæ conſtructionem, ac demonſtrationem hic exhibebimus.

Lemma 1.

SI ratio minoris inæqualitatis L O ad L R ſemper continuetur, venietur ad quantitatem quâuis datâ maiorem. Fig. 18. ſecunda.

Sit L O ad L R, vt L R ad L Q, &c. Igitur a inuertendo, vt Q L ad R L, ſic R L ad O L. Ergo diuid. b Q R ad R L, vt R O ad O L: & permut. c Q R ad R O, vt R L ad O L. Sed R L eſt maior quam O L. Ergo etiam Q R maior quam R O. Pari modo oſtendam I Q eſſe maiorem quam Q R & ſic deinceps. Quoniam igitur continuando rationem L O ad L R, ad primam, L O, ſemper accedant partes O R, R Q, Q I &c. perpetuo creſcentes, patet veniri ad quantitatem quâuis datâ maiorem. Quod erat demonſtrandum.

a Per ſchol. p 16. l. 5.
b Per 17. l. 5
c Per 16 l. 5.

Lemma 2.

SI ratio quæcunque maioris inæqualitatis A B ad C B ſemper continuetur, ad quantitatem venietur quâuis datâ minorem. Fig. 18. vtraque.

Data ſit L O quantumuis parua. Fiat a vt B C ad B A, ſic L O ad L R. Poterit d ratio L O ad L R toties

a Per 9. l. 6.
d Per lem. 1.

toties continuari, vt aliquis terminus habeatur, puta L I maior quã AB. Quoties vero continuata iam eſt ratio L O ad L R, per totidem terminos C B, E B, F B continuetur ratio A B ad C B. Erit F B minor quam O L.

Nam ex conſt. patet I L, Q L, R L, O L, eſſe proportionales ipſis A B, C B, E B, F B. Igitur ex æquo, vt e I L ad O L, ſic A B ad F B: & permutando f vt I L ad A B, ſic O L ad F B. Sed I L eſt maior g quam A B. Ergo etiam data O L, eſt maior quam F B. Quod erat demonſtrandum.

e Per 22. l. 5.
f Per 16. l. 5.
g Per conſtr.

Problema.

Fig. 19.

DAta ſit ratio maioris inæqualitatis A B ad B C. Oporteat hanc per infinitos terminos continuare, & omnium ſummam exhibere.

Erigantur perpendiculares A L, B O, æquales datis A B, B C, & per L O ducatur recta concurrens cum A B C producta, in Z. Dico i, ſi ex C erigas perpendicularem C Q; erit C Q tertia proportionalis. Q C transfer in C E, & ex E erige E R, erit hæc quarta. E R trãsfer in E F, & erige F S, erit hæc quinta: atque ita ratio A B ad B C, hoc eſt A L ad B O, per terminos A L, B O, C Q, E R, F S &c. ſiue A B, B C, C E, E F, F I &c. in infinitum continuabitur, quia quilibet terminus (vt F S) poterit auferri ex reſiduo F Z; cum enim L A (hoc eſt A B) ſit minor quam A Z, etiam F S erit b minor quam F Z.

b Patet ex corol. 1 p. 4. l. 6.

Dico

Dico 2. A Z eſt æqualis toti ſummæ infinitarum proportionalium.

1. Pars A Z eſt ad B Z, vt c A L ad B O; hoc eſt vt A B ad B C: Igitur permutando, o A B eſt ad A Z, vt B C ad B Z. Ergo A Z eſt ad B Z d vt B Z ad C Z. Sed vt A Z eſt ad B Z, ſic L A eſt ad O B, & vt B Z ad C Z, ita O B ad Q C. Ergo etiã L A eſt ad O B, vt O B ad Q C. Eodem modo oſtendam O B eſſe ad Q C, vt Q C ad R E, & ſic deinceps in infinitum. c Per idem corol. o Per 16. l. 5. d Per corol. 2. p. 18. l. 5.

2. Pars. Tota ſumma infinitorum terminorum, neque minor eſt quam A Z, neque maior; Ergo æqualis. Non eſt maior, quia, cum iam oſtenderim ſupra, Q C eſſe minorem quam C Z, & R E quam E Z, & S F quam F Z, & ſic deinceps ſine termino, poterunt omnes termini Q C, R E, S F &c. ſine fine conſtitui iuxta inuicem in recta A Z, ſic vt numquam punctum Z attingatur. Non erit etiam minor quam A Z: quia iam oſtendi ſupra A Z, B Z, C Z eſſe continuè proportionales, & eodẽ modo idem oſtenditur de reliquis E Z, F Z &c. Cum igitur transferendo proportionales Q C, E R, F S &c. in C E, E F, F I, reſidua E Z, F Z, I Z &c. ſemper ſint continuè proportionalia, vt iam oſtendimus, venietur tandẽ ad reſiduum e dato minus, ac proinde ſumma proportionalium ſuperabit quantitatem omnem, quæ minor ſit quam A Z; vnde ipſa non poteſt eſſe minor quã A Z. Quoniam igitur nec maior eſt, nec minor, quã A Z, idem æqualis erit. Quod erat demonſtrandũ. e Per lem. 2.

Theorema.

PRimorum terminorum differentia, primus terminus, & tota infinitarum proportionalium ſumma, ſunt continuè proportionales.

Fig. 19. In ſuperiori figura ducatur O X parallela ad A Z. Igitur L X erit differentia primi termini A L, ſeu A B, & ſecundi B O, ſeu B C. Quoniam X O eſt parallela ad A Z. Erit L X ad X O, ut f L A ad A Z. Sed X O eſt A B, & L A etiã eſt AB. Ergo L X differentia, eſt ad A B primum terminum, ut A B primus terminus ad A Z totam ſummam. Quod erat demonſtrandum.

f Per coroll. 1 p. 4 l. 6.

Fig. 20. Idem uniuerſaliter & breuiſſimè demonſtrabitur in omni genere quantitatis hunc in modũ. Sint continuè proportionales quæcunque (etiam numeri) A Z, B Z, C Z &c. quæ transferãtur omnes in primam A Z. Erunt igitur A B, B C, C E, E F &c. proportionalium differentiæ, quæ una cũ poſtrema quantitate I Z, æquantur primæ A Z. Quia verò, ſi proportionales in infinitũ continuentur, poſtrema quantitas per lem. 2. euaneſcit, patet infinitarum proportionalium differentiis æquari primæ A Z. Deinde, quia eſt A Z ad B Z, ut B Z ad C Z, & ſic deinceps, erit diuidendo A B ad B Z, ut B C ad C Z, & p conuertendo ut A B prima differentia ad A Z primam quantitatem, ita B C ſecunda differentia ad B Z quantitatem ſecundam, & ſic deinceps. Ergo ut A B prima differentia ad

p Per coroll. 1. p. 18. l 5.

A Z

A Z primã quantitatem, q ita omnes differentiæ (hoc eſt, vt iam oſtendi, prima quantitas A Z) ad omnes quantitates, hoc eſt ad totam ſummam infinitarum quantitatum. Quod erat demonſtrandum. q Per 12. l. 5.

PROPOSITIO XII.

Datis tribus rectis (A B, B C, A F) quartam proportionalem inuenire. Fig. 21.

Diſponantur datæ rectæ vt figura monſtrat, & duc rectam B F: cui parallela fiat C Z infinita. Ipſi C Z occurrat A F producta in L.

Dico A B eſt ad B C, vt A F ad F L vt patet ex p. 2. huius. Ergo F L eſt quarta proportionalis quæſita.

Scholium.

Pulchrè Bettinus noſter in ſuo Ærario Mathematicæ philoſophiæ. Ex 35. l. 3. & 14. huius, quæ ab hac non dependet; datis tribus quartam, & datis duabus tertiam proportionalem exhibet, hunc in modum.

Si tres dentur rectæ; ſecunda C B & tertia C D ponantur in directum, quas prima B A tangat in B ſub quouis angulo. Per puncta C, A, D, deſcribe a circulum, cui A B prima occurrat in Z. B Z eſt quarta proportionalis. Fig. 22. a Per 3. l. 4.

b Per 35. l. 3. *Cum enim rectangula A B Z, C B D b æqualia ſint, erit A B ad B C, vt B D ad B Z per 14 huius, quæ ab hac, vt dixi non dependet.*

Fig. 23. *Si dentur duæ rectæ A B, B C; ſecundæ B C apponatur in directum B D æqualis B C. Dein ipſam C B in B tangat prima A B ſub quouis angulo. Tum reliqua vt ſupra. Erit B Z tertia proportionalis quæſita.*

Demonſtratio ſimilis eſt, cum enim rectangula A B Z, C B D ſint æqualia, erit A B ad B C vt B D (hoc eſt vt B C) ad B Z.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 24. *Datis duabus rectis (A C, C B) mediam proportionalem inuenire.*

Tota compoſita A B biſecetur in O, & centro O deſcribatur circulus per A & B, ex C erige perpendicularem C F, occurrentem peripheriæ in F.

Dico A C eſt ad C F, vt C F ad C B.

Ducantur enim A F, B F, triangulum a A F B rectangulum eſt, & à recto angulo ducta eſt perpendicularis F C in baſim. Ergo A C eſt ad C F, vt *b* C F ad C B.

a Per 31. l. 3.

b Per corol. 1. p. 8. l. 6.

Corollarium.

Hinc patet ſi ex quouis peripheriæ puncto (F) ducta ſit ad diametrum perpendi-

[pe]ndicularis (F C) eam eſſe mediam proportionalem inter diametri ſegmenta (AC, [C]B.)

Scholium.

Hic locus omnino exigit, ut de duabus medijs proportionalibus inter duas datas inuenien[d]is etiam breuiter dicamus aliquid. In huius pro[b]lematis ſolutionē, Platonis hortatu, omnes Græ[c]iæ Geometræ ſummo ſtudio incubuerunt. Ab Eu[t]ocio in comment. in Archim. varij recenſentur [ſ]ubtiliſſimi modi, Platonis, Architæ Tarentini, [M]enechmi, Eratoſthenis, Philonis Byſantij, Hero[n]is, Apollonij Pergæi, Nicomedis, Dioclis, Spori, [P]appi; quibus alios deinde addiderunt, Vernerus, [P].Gregorius à S. Vincentio, Renatus Carteſius. Ex [o]mnibus viſum eſt tres adferre reliquis faciliores.

Modus Platonis.

Oporteat inter datas A B, B C, duas medias inuenire. Fig. 25.

Ponantur A B, B C, ad rectū angulum & pro[d]ucantur infinitè verſus X & Z. Accipiãtur dein[d]e duæ normæ (ita Claudius Richardus noſter; Plato enim unicâ normâ utitur, ſed a cuius lateri D E inſerta ſit regula mobilis per D E) & unius normæ angulus D applicetur rectæ B X, eâ lege, ut & latus vnū trãſeat per A, & ad punctū E, in quo latus alterū ſecabit rectam B Z, applicata norma ſecun-

a Vide Fig. 26.

ſecunda, tranſeat per C. Dico B D, B E duas eſſe medias inter datas A B, B C: hoc eſt vt A B eſt ad B D, ſic eſſe B D ad B E, & B E ad B C.

Demonſtratio patet ex coroll. 1. p. 8. l. 6. Nam A D E rectangulum triangulum eſt, & ab angulo recto in baſim perpendicularis cadit D B. Ergo per dictum coroll. vt A B ad B D, ſic B D ad B E: Et ob eandem cauſam, vt B D, ad B E, ſic B E ad B C. Inter datas igitur A B, B C repertæ ſunt duæ mediæ B D, B E. Quod erat faciendum. Hic modus inter omnes intellectu facillimus eſt.

Modus Philonis Byſantij.

Fig. 27. DVæ datæ A B, B C iungantur ad rectum angulum; tum perficiatur rectangulũ A B C D & producatur D A, D C infinitè, ducanturq; diametri B D, A C, ſe ſecantes in E. Centro E per B ducatur circulus, qui, quod angulus A B C rectus ſit, tranſibit b per A & C. Tum regula ſic applicetur ad punctum B, vt intercepta B G, O F ſint æquales. Dico A F, G C eſſe duas medias inter datas A B, B C: hoc eſt vt A B eſt ad A F, ſic A F eſſe ad G C, & G C ad C B.

b Patet ex 31. l. 3.

Demonſt. Quia G B, O F, c æquantur, etiã O G, B F æquales erunt. Ergo æqualia ſunt rectangula O G B, B F O, hoc eſt rectangula d D G C, D F A. Ergo eſt vt G D ad D F, e ſic reciprocè A F ad G C. Sed G D, eſt ad D F, f vt B A ad A F. Ergo vt B A eſt ad A F, ſic A F eſt ad G C. Rurſum quia iam oſtendi A F eſſe ad G C, vt B A eſt ad A F, eſt vero

c Per conſtr.

d Per coroll. 1. p. 36. l. 3.

e Per 14. quæ ab hac non pendet.

f Per corol. 1. p. 4. l. 6.

ad A F, ut G D ad D F, hoc eſt ut G C ad C B; erit quoq; A F ad G C, ut G C eſt ad C B: omnes igitur quatuor B A, A F, G C, C B, ſunt continuè proportionales; ac proinde inter datas B, B C inuentæ ſunt duæ mediæ. Quod erat faciendum.

Hi duo modi quamuis ſint ingenioſi & faciles, tamen, quia debita norma, & regulæ applicatio, non niſi tentando fit, Geometrici non ſunt.

Modus Carteſij.

PAretur inſtrumentũ huiuſmodi. Duæ regulæ aperiri poſſint & claudi circa Y. His inſertæ ſint plures normæ inter ſe connexæ in B, C, D, E, F, G, eâ lege ut dum regulæ Y X, Y Z aperiũtur, norma B C impellat normã C D in regulâ Y Z, & norma C D impellat normã D E in regulâ Y X: & D E impellat E F, & E F impellat F G, & ſic deinceps: Dum verò regulæ Y X & Y Z clauduntur, omnia puncta B, C, D, E, F, G, incidant in unum idemq; punctum A. Hoc inſtrumento inter duas datas non ſolum duæ, ſed etiam quatuor & ſex, imò quotuis mediæ reperientur. Quod neq; per ſectiones conicas, neq; per modos ullos ab auctoribus ſupradictis inuentos obtineri poteſt. Fig. 28.

Pro duabus medijs opus eſt normis tribus, pro medijs 4. normis 5. & ſic deinceps.

Minor datarum transferatur in regulã Y X, & ſit Y B; maior in regulam alteram Y Z, & ſit Y E. Applicetur norma prima ad punctum B, ibidemq;

demumq́; firmetur, & aperiantur regulæ, donec normæ tertiæ latus tranſeat per E. Dico Υ C, Υ D, eſſe duas medias inter datas Υ B, Υ E; hoc eſt Υ B eſſe ad Υ C, ut Υ C eſt ad Υ D, & Υ D ad Υ E.

Demonſtratio manifeſta eſt ex coroll. 2. p. 8. l. 6. Nam ex natura inſtrumenti, in trigono Υ C B angulus ad C rectus eſt, ab eoq́; cadit C B perpendicularis in baſim Υ D. Ergo per dictum coroll. ut Υ B eſt ad Υ C, ſic Υ C eſt ad Υ D. Rurſum quia in trigono Υ D E angulus ad D rectus eſt, ab eoq́; cadit perpẽdicularis D C in baſim Υ E, erit ut Υ C ad Υ D, ſic Υ D ad Υ E. Sũt igitur Υ B, Υ C, Υ D, Υ E quatuor continuè proportionales. Inter datas igitur Υ B, Υ E inuentæ ſunt duæ mediæ Υ C, Υ D. Quod erat faciendum.

Si inter datas Υ B, Υ G, petãtur 4. mediæ, aperi regulas donec normæ quintæ latus F G tranſeat per G. Erunt Υ C, Υ D, Υ E, Υ F quatuor mediæ inter Υ B, Υ G. Demonſtratio patet ex eod. coroll.

Hic modus, quamuis organum ſit Platonico illo operoſius, planè eximius eſt, tum quia nihil perficit tentando, tum quia ad 4. & 6. imò quotcunque medias ſe extendit.

Per duas medias perficitur problema Deliacũ, cubi nimirum duplicatio, & corpora quæcunque in data proportione o augentur, vel minuuntur, quemadmodum idipſum in figuris planis efficitur p per unam mediam. Hanc viam primus aperuit Hippocrates, quã ut ſingularem & unicam, omnis Geometrarum poſteritas amplexa eſt.

o Vide ſchol. poſt 18. l. 12.

p Vide corol. 3. p. 20. l. 6.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

PArallelogrãma æqualia (X, Z) quæ vnum angulum (C) vni (O) habent æqualē, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc eſt A C ſit ad C B, vt F O ad O L.) Fig. 29. 30.

Et ſi latera ſic habent reciproca, parallelogramma ſunt æqualia.

1. Pars. I L & S B productæ concurrant in Q. Parallelogrammum X eſt ad parall. R, vt A C *a* ad C B: & Z eſt ad *b* R, vt F O ad O L. Sed quia per hyp. X & Z æqualia ſunt, X eſt *c* ad R, vt Z eſt ad R. Ergo etiam A C eſt ad C B, *o* vt F O ad O L. Quod erat demonſtrandum. a Per 1. l. 6. b Per eand. c Per 7. l. 5. o Per 11. l. 5.

2. Dem. 2. pars. Vt A C ad C B, ſic *d* X eſt ad R, & vt F O ad O L, ſic *e* Z ad R. Sed iam per hyp. A C eſt ad C B, vt F O ad O L. Ergo X eſt ad R *o* vt Z eſt ad R. Ergo X & Z æqualia *q* ſunt. d Per 1. l. 6. e Per eand. o Per 11. l. 5. q Per 9. l. 5.

PROPOSITIO XV.

ÆQualia triangula (A C L, F C B) quæ vnum angulum (C) vni (O) æqualem habent, etiam latera circa æ- Fig. 31. 32.

quales

quales angulos habent reciproca. (hoc eſt A C eſt ad C B, vt F O ad O L.)

Et ſi latera ſic habent reciproca, triangula ſunt æqualia.

Ducatur recta L B; reliqua demonſtratio eadem quæ præcedentis.

Corollarium.

TAm parallelogramma, quam triangula, quæ reciprocant baſes & altitudines ſunt æqualia: Et è conuerſo.

Patet ex duabus præcedentibus.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 33. *SI quatuor rectæ (A B, F I, I L, B C) fuerint proportionales (hoc eſt ſi A B ſit ad F I, vt I L ad B C.) Rectangulū (X) ſub extremis (A B, B C) æquale eſt rectangulo (Z) ſub medijs (F I, I L.)*

Et ſi rectang. ſub extremis æquatur rectangulo ſub medijs, erunt illæ quatuor rectæ proportionales.

1. Pars. In rectangulis X & Z, circa rectos angulos, ac proinde æquales B, I, per hyp. eſt A B ad F I, vt reciprocè I L ad
a Per 14. l. 6 C B. Ergo a X & Z æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

2. Pars.

2. Pars. Quoniam X & Z iam ponuntur æqualia; Ergo *b* circa æquales angulos B & I, eſt A B ad F I, vt reciprocè I L ad B C. Quod erat demonſtrandum. b *Per eand.*

PROPOSITIO XVII.

SI tres rectæ (A B, F L, B C) fuerint proportionales; rectangulum ſub extremis (A B, B C) æquale erit quadrato mediæ (F F.) *Fig. 34.*

Et ſi rectangulum ſub extremis æquatur quadrato mediæ, erunt tres illæ rectæ proportionales.

1. Pars. Mediæ F L accipiatur par O. Quoniam igitur per hyp. A B eſt ad F L, vt F L ad B C, eſtque O par F L. Erit quoque A B ad F L, vt O ad B C. Ergo *o* rectang. ſub extremis A B, B C æquatur rectangulo ſub medijs F L & O, hoc eſt quadrato F L. o *Per præc.*

2. Pars. Demonſtratur ſimiliter ex ſecunda parte præcedentis.

Corollarium.

EX hac & ex 13. patet; ſi in circulo ſit F C perpendicularis diametro, rectangulum A C B æquale eſſe quadrato F C. *Fig. 24.*

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 35.

Super data recta (RS) dato polygono (BQ) ſimile ſimiliterque poſitum deſcribere.

a Per 23. l. 1.

b Per corol. 9. p. 32. l. 1.

c Per conſtr.

d Per conſtr.

e Per conſtr.

f Per coroll.

g Per 4. l. 6.

h Per eand.

i Per 22. l. 1.

Polygonum datum B Q reſolue in triangula. Super data recta R S fac a angulos R, O æquales angulis B, A. Coibūt latera in X: Super X S fac angulos V, I æquales angulis T, C. Coibunt latera in Z. Dico factum.

Nam quia anguli, R, O æquantur angulis B, A, etiam E, K b æquales erunt: & quia etiam c V æquatur T, totus E V toti K T æqualis erit. Similiter quia, d ſinguli O, I æquantur ſingulis A & C, toti O I, A C æquales erunt. Et quia e V & I, æquantur T & C, etiam Z & Q æquales f ſunt. Polygona igitur R Z, B Q ſibi mutuo æquiangula ſunt. Reliquum eſt vt oſtendatur etiam latera eſſe proportionalia. R S eſt ad B F g vt S X ad F L: & rurſum S X eſt ad F L, h vt S Z ad F Q. Ergo ex æquo i R S eſt ad S Z, vt B F ad F Q. &c.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 36. 37.

Triangulorum (X, Z) ſimilium proportio eſt duplicata proportionis laterum (A C, F I) æqualibus angulis ſubtenſorum.

Hoc

Hoc eſt, ſi *a* fiat vt A C ad F I, ſic F I ad tertiam A Q; triang. X eſt ad triang. Z, vt A C prima ad tertiam proportionalem A Q. Vide defin. 10. 5. a Per 11. l. 6.

Quoniam triangula X, Z ſunt ſimilia, erit B A ad L I, *b* vt A C ad I F. Sed per conſtr. vt A C ad I F, ſic I F ad A Q. Ergo etiam B A eſt ad L I, *c* vt I F ad A Q. Ergo in triangulis Q B A & Z, latera circa angulos A, I, qui per defin. triangulorum ſimilium æquales exiſtunt, ſunt reciproca. Æquantur igitur *d* Q B A & Z. Atqui triangulum X ad Q B A eſt ut *e* baſis A C ad baſim A Q. Ergo etiam X eſt ad Z, vt A C ad A Q. Quod erat demonſtrandum. b Per 4. l. 6. c Per 11. l. 5. d Per 15. l. 6 e Per 1. l. 6.

PROPOSITIO XX.

Similia polygona (A B C D E, F G H I K) diuiduntur (1) in ſimilia triangula (P, S & Q, T, & R, V) numero æqualia: (2) & totis proportionalia (3) & polygonorũ proportio duplicata eſt proportionis laterum (A B, F G) inter æquales angulos (B, G & B A E, G F K) exiſtentium. Fig. 18.

1. Pars. Quoniam polygona ſunt ſimilia, erunt *a* ſibi mutuo æquiangula, eruntq; bini binis æquales anguli B A E, G F K, & a Per def. 1. l. 6.

B, G, & B C D, G H I, & C D E, H I K, &
b Per eand. E, K. Quia igitur A B eſt ad B C, *b* vt F G ad G H, angulique B & G æquales ſunt, ſimilia *c* ſunt triangula P, S. Similiter demonſtrabitur ſimilia eſſe R & V. Deinde quia toti B C D, G H I, & ablati B C A, G H F æquales ſunt, etiam reliqui A C D, F H I æquales erunt. Eodem modo oſtendam æquari A D C, F I H. Ergo *d* tertius C A D tertio H F I æqualis eſt. Quare *e* etiam Q & T triãgula ſimilia ſunt. Liquet ergo 1. Pars.

c Per 6. l. 6.

d Per cor. 9. 1. p. 32. l. 1.

e Per 4. l. 6.

Pars 2. Quoniam ſimilia ſunt P & S, ratio P ad S duplicata eſt *f* rationis C A ad H F. Sed ob eandem cauſam etiam ratio Q ad T duplicata eſt rationis C A ad H F. Ergo P eſt ad S vt *g* Q ad T. Eodem modo oſtendam vt Q eſt ad T, ita R eſſe ad V. Ergo vt *i* vnum antecedens P eſt ad vnum conſequens S, ita omnia antecedentia P, Q, R ſimul ſumpta, ad omnia conſequentia S, T, V ſimul ſumpta, hoc eſt polygonum ad polygonum. Quod erat alterum.

f Per præc.

g Per 34. l. 5.

i Per 12. l. 5.

3. Pars. Ratio P ad S eſt *k* duplicata rationis A B ad F G. Sed ratio polygoni ad polygonum eſt eadem cum ratione P ad S, vt iam oſtendi. Ergo etiam ratio polygoni ad polygonum eſt duplicata rationis A B ad G F. Quod erat tertium.

k Per præc.

Corol-

Corollaria.

1. OMnes figurę ordinatæ ſeu regulares, vt æquilatera triangula, quadrata, pentagona &c. ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum. Omnes enim ordinatæ ſunt ſimiles inter ſe, vt patet ex def. 1. 6.

2. Si figurarum quarumuis ſimilium latera A B, F G inter æquales angulos poſita, ſint nota, etiam proportio figurarum innoteſcet. Sit ex. gr. A B 2. ped. & F G 6. pedū, ſiat vt 2. ad 6. ita 6. ad alium numerum nempe 18. Figura minor eſt ad maiorem, vt 2. ad 18. ſeu vt 1. ad 9. Inuenitur autem tertius proportionalis numerus, ſi ſecundus datorum multiplicetur per ſeipſum, & productus per primum diuidatur. *Fig. 38.*

3. Ex eadem propoſitione elicitur methodus præclara, figuram quamuis rectilineā augendi vel minuendi in ratione data: vt ſi velim pentagoni, cuius latus eſt A B, aliud facere quintuplum. Inter terminos rationis datæ A B, B C, inueni *m* mediam proportionalem B X. ſuper hac conſtrue *n* pentagonum ſimile dato. Hoc erit quintuplum dati. *Fig. 39.* m *Per* 13. *l.* 6 n *Per* 18. *l.* 6.

Nam per 20. pentagonum A B eſt ad ſibi ſimile B X, vt A B prima ad B C tertiam.

Porrò cum etiam circulorum proportio ſit duplicata proportionis diametrorum, (vt

oſtendetur p.2.l.12. Hæc praxis ad circulos quoque pertinebit.

PROPOSITIO XXI.

Fig.40. *Figuræ (A,B) quæ eidem (C) ſimiles ſunt, etiam ſibi mutuo ſimiles ſunt.*

Patet ex defin. 1.l.6. ex axiom. 1. l. 1. & propoſ. 11.l.5.

PROPOSITIO XXII.

Fig.40.& 41. *SI quatuor aut plures rectæ (F I, L Q; & O R, S V) proportionales fuerint, figuræ ſimiles, ſimiliterq; ab ijs deſcriptæ (A, B, & E, K) proportionales erũt. Et è conuerſo.*

Demonſtratio primæ partis patet ex 34. 5. Quoniam enim a rationes A ad B, & E ad K ſunt duplicatæ rationum F I ad L Q, & O R ad S V, ex hypotheſi æqualium, etiam ipſæ æquales erunt.

a Per 19. & 20.l.6.

Pars 2. patet ex 35. l.5.

PROPOSITIO XXIII.

Fig.42. *ÆQuiangula parallelogrãma (X, Z) inter ſe rationem habent compoſitam ex rationibus laterum (A C ad C B, & L C ad C F.)*

Hoc

Hoc eſt, ſi fiat C B ad O, vt L C ad CF; X eſt ad Z, vt A C ad O. Vide quæ demonſtrauimus l. 5. parte 3. num. 13.

Concurrant I L, S B in Q. Parallelogrammum X eſt *b* ad parallelogrammum R vt A C ad C B: & R eſt ad Z, *c* vt L C ad C F (hoc eſt vt C B ad O.) Ergo *d* ex æquo X eſt ad Z, vt A C ad O. Quod erat demonſtrandum.

b *Per* 1. *l.* 6.
c *Per eand.*
d *Per* 22. *l.* 5

Corollaria.

HInc & ex 34. l. 1. patet primo. Triangula quæ vnum angulum (ad C) æqualem habent, rationem habere compoſitam ex rationibus rectarum A C ad C B, & L C ad C F æqualem angulum continentium. *Fig.* 41.

Patet 2. rectangula, ac proinde & parallelogramma quæcunque, rationem inter ſe habere compoſitam ex rationibus baſis ad baſim & altitudinis ad altitudinem. Neque aliter de triangulis ratiocinaberis.

Patet 3. Quo modo triangulorum ac parallelogrammorum proportio exhiberi poſſit. Sunto parallelogramma, X & Z, & eorũ baſes A C, C B, altitudines C L, C F. Fiat *e* vt C L altitudo ad altitudinem C F, ita baſium altera C B ad O, parallelogrammum X eſt ad parallelogram. Z vt A C eſt ad O. *Fig.* 41.

e *Per* 12 *l.* 6

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 43.

IN *omni parallelogrammo* (*S F*) *quæ circa* (*A B*) *diametrum ſunt parallelogramma* (*C L*, *O I*) *& toti & inter ſe ſimilia ſunt.*

Per 27. 1. æquales ſunt anguli C, S, & L, F. Per eandem E eſt par I, hoc eſt per eandem ipſi A; B verò & toti SF, & parti C L cõmunis eſt. Igitur totum S F & pars C L æquiangula ſunt. Reliquum eſt, vt etiam latera æqualibus angulis oppoſita habeant proportionalia.

Quoniam in triangulis B C E, B S A, eſt C E parallela ad S A, erit c B C ad C E, vt B S ad S A; & C E eſt ad E B, vt e S A ad A B. Quia vero in triangulis quoq; E L B, A F B, E L eſt parallela ad A F, erit E B ad E L, vt i A B ad A F. Ergo ex æquo f C E eſt ad E L, vt S A ad A F. Igitur l C L & totum S F ſimilia ſunt. Eodem modo oſtendam O I eſſe ſimile toti S F. Ergo n C L & O I ſunt etiam ſimilia inter ſe. Quæ erant demonſtranda,

c Per coroll. 1. p. 4. l. 6.
e Per idem coroll.
i Per idem coroll.
f Per 22. l. 5.
l Per defin. 1. l. 6.
n Per 21. l. 6.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 46.

POlygonum datum (*A*) *in aliud dato* (*B*) *ſimile tranſmutare.*

Siue

Sive polygonum conſtituere æquale dato A, & ſimile alteri dato B.

Super C F latere polygoni B, cui ſimile petitur, fac rectangulum Q a æquale B. Deinde ſuper F S fac b rectangulum R æquale A. Manifeſtum eſt C F & F I eſſe in directum. Inter C F, F I inueni c mediam proportionalem F L. Super hac fac d polygonum ſimile dato B, erit hoc etiam æquale dato A.

a Per 44. l. 1.
b Per eand.
c Per 13. l. 6.
d Per 18. l. 6.

Nam cum per conſtr. ſint tres proportionales C F, F L, F I, polygonum B eſt ad ſimile ſibi polygonum ſuper F L factum, e vt C F ad F I, hoc eſt i vt Q ad R. Igitur permutando vt polygonum B eſt ad Q, ita polygonum ſuper F L eſt ad R. Sed per conſtr. polygonum B æquatur Q. Ergo etiam polygonum ſuper F L, ſimile ipſi B, æquatur R, hoc eſt per conſtruct. dato A. Factum eſt igitur quod petebatur.

e Per 20. l. 6. & defin. 10. l. 5.
i Per 1. l. 6.

PROPOSITIO XXVI.

Parallelogramma ſimilia (BD, FN) habentia angulum communem (A) circa eandem diametrum exiſtunt.

Duc rectas A E, C E, ſi negas A E C eſſe diametrum communem parallelogrammorum

Fig 44.

rum B D, & F N; ipſius B D diameter eſto recta alia A G C ſecans F E in G, & duc parallelam G H. Parallelogramma igitur F H, B D exiſtent circa communem diametrum A G C, ac proinde a erunt ſimilia. Ergo vt B A ad A D, b ſic F A ad A H. Sed etiam vt B A ad A D, ſic F A ad A N, cum B D, F N ſimilia ſint per hyp. Ergo F A eſt ad A H, vt F A ad A N. Quod eſt abſurdum.

a Per 24. l.6.
b Per defin. 1. l.6.

PROPOS. XXVII. XXVIII. XXIX.

TYronibus faceſſunt negotium, & nullius ferè ſunt vſus.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 45.

DAtam rectam (A B) ita ſecare, vt tota (A B) ſit ad vnum ſegmentum (A C,) ſicut idem ſegmentum eſt ad reliquum (C B.)

Hoc eſt (vt loquuntur Geometræ) lineam extremâ ac mediâ ratione ſecare.

Per 11.2. ita ſeca A B in C, vt rectangulum ſub A B, C B, ſit æquale quadrato A C. Dico factum.

Erit enim per 17. vt A B ad A C, ſic A C ad C B.

Huius

Huius ſectionis vis admirabilis eſt in corporum regularium inſcriptione & comparatione.

PROPOSITIO XXXI.

S*I à lateribus trianguli rectanguli (ACB) figuræ ſimiles quæcunque deſcribantur, erit ea quæ opponitur recto angulo duabus ſimul reliquis (L, R,) æqualis.* Fig. 47.

Propoſitio igitur 47. l. 1. hîc redditur vniuerſalis.

Ab angulo recto C demittatur perpendicularis C O. Quoniam A B, B C, B O ſunt *a* tres proportionales, erit F ad ſibi ſimilem, R, *b* vt A B prima ad B O tertiam. Rurſum quoniã *c* B A, A C, A O, ſunt proportionales, erit F ad ſibi ſimilẽ, L, vt *d* B A prima ad A O tertiam. Quia igitur eſt F ad R, vt A B ad B O, & F ad L; vt A B ad A O, erit quoq; F ad R & L ſimul ſumptas, vt *e* A B ad B O, A O ſimul ſumptas. Sed A B duabus B O, A O æqualis eſt. Ergo etiam F, duabus R & L æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

a Per coroll. 2. p. 8. l. 6.
b Per 20. l. 6. & per def. 10. l. 5.
c Per corol. 2. p. 8. l. 6.
d Per 20. l. 2. & defin. 10. l. 6.
e Per 24. l. 5.

Corollarium.

EX hac propoſitione facilè dabitur quotcunq; figuris ſimilibus rectilineis quibuſcunque

boſcunque vna omnibus æqualis & ſimilis, eâdẽ proſſus methodo, quâ probl. 1. ſcholij poſt 47. l. 1. exhibetur datis quotlibet quadratis vnum æquale. In demonſtratione tantum pro 47. l. 1. citetur 31. l. 6.

PROPOSITIO XXXII.

VIx habet vſum, nec quidquam habet notabile.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 48. *IN æqualibus circulis, vel eodem, anguli, ſiue ad centra (vt ABC, FOD) ſiue ad peripheriam (vt ARC, FSD) eam inter ſe rationem habent, quam arcus (AKC, FGD) quibus inſiſtunt. Idem intellige de ſectoribus.*

Quod attinet ad angulos centri & ſectores, demonſtrabitur eodem prorſus modo, quo prop. 1. huius libri demonſtratum eſt triangula æquè alta eſſe vt baſes. Tantum vbi iſthic citatur prop. 38. l. 1. hîc citetur 27. lib. 3.

a Per 20. l. 3. Quoniam verò ad peripheriam anguli R & S dimidij *a* ſunt angulorum ad centrum A B C, F O D, quod de his oſtenſum eſt, liquebit etiam de illis.

Corol.

Corollaria.

1. ANgulus centri (B A C) eſt ad quatuor rectos, vt arcus B C cui inſiſtit, ad totam circumferentiam. *Fig. 42.*

Nam vt B A C eſt ad rectum B A F, ita per hanc 33. arcus B C ad quadrantem B F. Ergo angulus B A C eſt ad 4. rectos, vt arcus B C eſt ad 4. quadrantes, hoc eſt ad totam peripheriam.

2. Inæqualium circulorum arcus I L, B C, qui æquales ſubtendunt angulos, ſiue ad centra vt I A L, & B A C, ſiue ad peripheriam, ſunt ſimiles.

Nam arcus I L eſt ad ſuam peripheriam, *b* vt angulus I A L, hoc eſt vt B A C, ad 4. rectos; & arcus B C eſt ad ſuam peripheriam, *c* vt idem angulus B A C ad 4. rectos. Ergo I L eſt ad ſuam peripheriam, vt B C ad ſuam. Ergo *d* ſunt ſimiles arcus I L & B C.

b *Per coroll.* 1.
c *Per idem corol.*
d *Per defin.* 4. *l.* 6.

3. Duæ ſemidiametri (A B, A C) à concentricis peripherijs, arcus auferunt ſimiles I L, B C. Patet ex coroll. 2.

4. Segmenta (B K C, I O L) quæ angulos capiunt æquales (K, O,) ſimilia ſunt.

Nam per coroll. 2. arcus B C, I L, ac proinde etiam arcus B K C, I O L, ſimiles ſunt.

ELEMENTORVM GEOMETRIÆ

LIBER VNDECIMVS

NOBIS SEPTIMVS.

SEx libris primis ſubiungit Euclides elementa numerorum tribus ſequentibus ſeptimo, octauo & nono comprehenſa, quibus etiam decimum de quantitatibus immenſurabilibus adiungit. Nos à planis immediatè tranſimus ad ſolida. De numeris ſeorſum tractaturi. Id, opinor, diſcentibus commodius erit, ſi elementa Geometriæ nullâ aliâ tractatione interrupta, ſimul omnia habeantur. Nihilominus cum citabimus propoſitiones huius & ſequentis libri, eos non ſeptimum & octauum, ſed vndecimum & duodecimum appellabimus, ne, ſi ab ordine Euclidæo vbiq; recepto diſcedamus, propoſitionum citatio implicatior reddatur.

Hic liber duas quodammodo partes complectitur. In prima iaciuntur fundamenta, quibus ſolidorum, hoc eſt corporum doctrina vniuerſa nititur. Altera parallelepipedorum affectiones proponuntur.

DEFINITIONES.

1. SOlidum ſiue corpus eſt, quod longitudinem, latitudinem & profunditatem habet.

2. Solidi extremum eſt ſuperficies.

3. Linea recta (A B) eſt ad planũ (C C) recta ſiue perpendicularis, cum ad rectas omnes lineas (C A) in plano (C C) ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit (B A C, B A C. *Fig. 1. lib. 11. tabulâ 3.*

4. Planum ad planum rectum ſiue perpendiculare eſt, cum omnes rectæ lineæ (L Q,) quæ communi planorum ſectioni (X R) perpendiculares ducuntur in planorum vno, rectæ ſunt alteri plano (A B C O.) *Fig. 2.*

5. Si recta linea (O L) plano inſiſtat non ad rectos angulos, & à ſublimi eius puncto (L) ad planũ ducatur perpendicularis L P iungaturque P O; angulus L O P dicitur inclinatio lineæ O L ad planum. *Fig. 3.*

6. Si planum (R E) plano (L Q) non inſiſtat perpendiculariter, alterius ad alterum inclinatio eſt acutus angulus (A B C,) qui continetur à rectis lineis, (A B & B C) quæ in vtroque plano ad communem ſectionem (O E) ducuntur perpendiculares. *Fig. 4.*

7. Planum ad planum ſimiliter inclinatum dicitur, atque alterum ad alterum

quando

quando dicti inclinationum anguli ſunt æquales.

8. Parallela plana ſunt, quæ in omnem partem producta, æqualibus ſemper interuallis diſtant.

9. Similes figuræ ſolidæ rectilineæ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur, multitudine æqualibus.

Fig. 5. 10. Angulus ſolidus rectilineus eſt, qui pluribus, quàm duobus planis angulis (B A C, C A O, O A B) non in eodem exiſtentibus plano, ſed ad vnum punctum conſtitutis, continetur.

11. Æquales ſolidi anguli ſunt, qui inter ſe inuicem poſiti congruunt.

Quemadmodum angulus planus eſt inclinatio linearum, ita ſolidus angulus eſt inclinatio ſuperficierum. De vtroque igitur eodem modo ratiocinandum erit. Conſule ſcholium poſt prop. 16. l. 3.

Fig. 6. 7. 8. 12. Priſma eſt figura ſolida, planis comprehenſa, quorum aduerſa duo (O F E, A C B) ſunt parallela, æqualia & ſimilia.

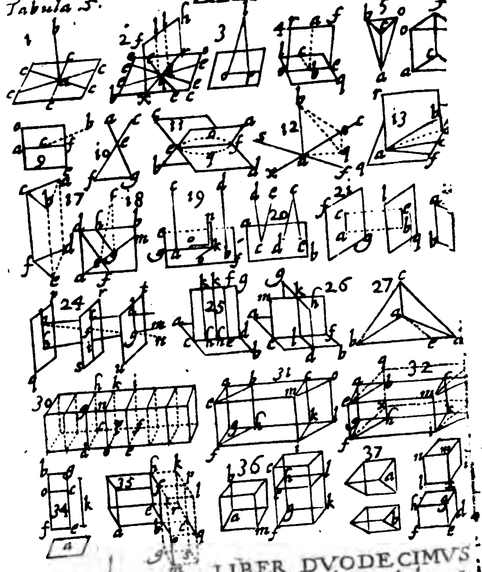
Fig. 8. 13. Parallelepipedum eſt ſolidum ſex quadrilateris, ex aduerſo parallelis comprehenſum.

14. Si ſex plana ex aduerſo parallela ſint quadrata, ſolidum ijs comprehenſum, cubus erit.

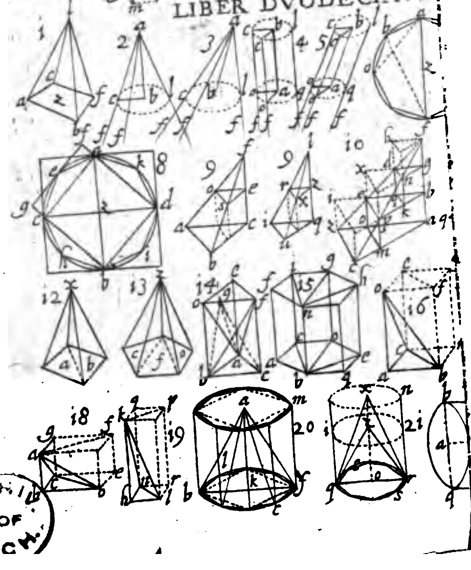
PRO-

Tabula 5.

LIBER VNDECIM'

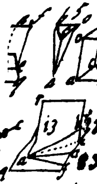


LIBER DVODECIMVS



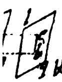
OF MICH

VNDECIM

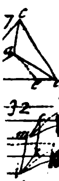


PROPOSITIO PRIMA.

lineæ pars vna (A C) nequit in ſubiecto plano (O E) altera extra planum. Fig. 9.



Hoc clarum eſt ex definitione plani, & rectæ. vide defin. 5. & 4. l. 1.



PROPOSITIO II.

Omne triangulum in vno eſt plano. Et duæ rectæ ſe mutuo ſecantes in eodem plano ſunt. Fig. 10.



Prima pars per ſe clara eſt, cum triangula nihil ſit aliud, quam plana ſuperficies tribus rectis comprehenſa. Ex quo etiam patet pars altera.

PROPOSITIO III.

SI duo plana (A B, C D) ſe mutuo ſecant; (E F) communis eorum ſectio eſt recta linea. Fig. 11.

Patet ex definitione plani. Licebit tamen ſic demonſtrare: ſi E F ſectio communis non eſt recta linea, ducatur in plano C D recta E O F, & in plano B A recta E Q F.

duæ

duæ igitur rectæ E O F, E Q F claudent ſpacium. Quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO VI.

Fig.12.

SI recta (B A) duabus rectis) C A X, F A S) ſe mutuò ſecantibus, perpendicularis exiſtat, etiam plano per ipſas ducto perpendicularis erit.

Si negas, alia recta B Q plano rectarum A C, A F ſit perpendicularis. Iunge A Q, & huic in plano F A C duc perpendicularem Q O. Hæc producta, neceſſario ſecabit *o* aliquam rectarum C A X, F A S vel vtramque, vbicunque tandem fuerit punctum, Q. ſecet ergo C A X in O, iungaturq; B O. Quoniam ergo angulus B A O per hyp. rectus eſt.

o Colligitur ex ſchol. poſt 31.l.1.

a Per 47.l.1

erit quad. B O. Æ. *a* quad. B A; quad. A O.

ſed quia B Q ponitur recta plano F A C, ac proinde *b* rectum facit cum A Q angulum B Q A, eſt

b Per defin. 3.l.11.

c Per 47.l.1

quad. B A. *c* Æ. quad. B Q; quad. A Q.

Et quia angulus A Q O per conſt. rectus eſt;

o Per eand.

quad. A O. Æ. *o* quad. O Q; quad. A Q.

Ergo

Ergo quad. BO. æ. quad. BQ
quad. OQ
quad. AQ bis.

Ergo quad. BO maius eſt BQ & OQ, ac proinde *d* angulus BQO rectus non eſt. Ergo BQ non eſt recta *e* plano CAF. Liquet ergo quæſitum.

d Patet ex eadem.
e Patet ex defin. 3 l. 11.

Scholium.

Ex eo quod ponebatur BQ eſſe recta plano FAC, directè eſt demonſtratum BQ non eſſe rectam plano FAC: ac proinde ex eo quod negaretur aſſertio theorematis, eadem aſſertio directè probata eſt. Hæc demonſtratio quoad ſubſtantiam eſt Ioannis Ciermans.

PROPOSITIO V.

Si tres rectæ (BA, CA, FA) eidem rectæ (AR) ad idem punctum (A) ſint perpendiculares; tres illæ erunt in vno plano.

Fig. 13.

Sit enim, ſi fieri poteſt, earum vna BA in alio plano RO; quod ſecet LQ planum duarum reliquarum CA, FA, rectâ AQ. Quoniam RA per hyp. perpendiculariter inſiſtit duabus CA, FA, plano LQ recta *a* erit. Ergo cum AO rectum facit *b* angulum RAQ. Sed etiam ex hyp. angulus

a Per præc.
b Per defin. 3. l. 11.

R A B rectus eſt. Ergo anguli, R A B & R A O æquales ſunt. Quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 4.

L Ineæ rectæ (A B, C D) quæ eidem plano (E F) ſunt perpendiculares, inter ſe ſunt parallelæ.

Poſtulari poterat vt per ſe notum; licebit tamen ſic demonſtrare.

Iunctâ B D, fac in plano F E, lineam D G normalem ad B D & parem B A, iunganturq; D A, G A, G B. Rectæ B D, D G æquantur B D, a B A, & anguli B D G, b D B A ſunt recti. Ergo A D, B G c ſunt æquales. Igitur triangula A B G, G D A ſibi mutuo æquilatera ſunt, ac proinde anguli A B G, A D G æquales. Sed A B G e rectus eſt. Quare & A D G rectus. Sunt vero & B D G ex conſtr. & C D G definit. 3. recti. Ergo G D ad tres C D, A D, B D, recta eſt. Ergo C D cum A D, B D eſt in vno i plano, ſed etiam A B cum A D, B D o in vno plano eſt. Ergo A B, C D ſunt in vno plano. Ergo cum anguli A B D, C D B, ſunt p recti, erunt A B, C D q parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

a Per conſtr.
b Per defin. 3. l. 11.
c Per 4. l. 1.
e Per defin. 3. l. 11.
i Per præc.
o Per 2. l. 11.
p Per defin. 3. l. 11.
q Per 29. l. 1. & defin. 36. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO VII.

Recta (EF) ſecans rectas (AB, CD) poſitas in eodem plano, in vno eſt cum ipſis plano. Fig. 15.

Poſtulari poterat. Qui volet ſic demonſtret.

Planum rectarum A B, C D ſecet aliud planum per puncta E, F, ſi iam E F non eſt in plano A B, C D, non erit E F communis ſectio. Sit ergo E G F. Ergo E G F a eſt linea recta. Duæ igitur rectæ E F, E G F concludunt ſpacium. Quod eſt abſurdum. a Per 3. l. 11.

Corollarium.

Hinc ſequitur ſi E F ſecat parallelas A B, C D, in eodem eſſe cum ipſis plano; omnes enim parallelæ b ſunt in vno plano. b Per defin. 36. l. 1.

PROPOSITIO VIII.

Si parallelarum (AB, CD) vna (A B) plano (E F) ſit recta, etiam altera (C D) eidem plano erit recta. Fig. 14.

Poterat poſtulari. Si demonſtratio quæritur, ferè ſimilis ea eſt demonſtrationi propoſitionis 6.

quando dicti inclinationum anguli ſunt æquales.

8. Parallela plana ſunt, quæ in omnem partem producta, æqualibus ſemper interuallis diſtant.

9. Similes figuræ ſolidæ rectilineæ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur, multitudine æqualibus.

Fig. 5. 10. Angulus ſolidus rectilineus eſt, qui pluribus, quàm duobus planis angulis (B A C, C A O, O A B) non in eodem exiſtentibus plano, ſed ad vnum punctum conſtitutis, continetur.

11. Æquales ſolidi anguli ſunt, qui intra inuicem poſiti congruunt.

Quemadmodum angulus planus eſt inclinatio linearum, ita ſolidus angulus eſt inclinatio ſuperficierum. De vtroq; igitur eodem modo ratiocinandum erit. Conſule ſcholium poſt prop. 16. l. 3.

Fig. 6. 7. 8. 12. Priſma eſt figura ſolida, planis comprehenſa, quorum aduerſa duo (O F E, A C B) ſunt parallela, æqualia & ſimilia.

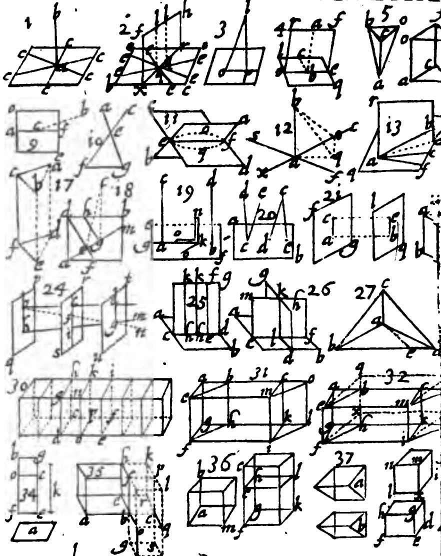
Fig. 8. 13. Parallelepipedum eſt ſolidum ſex quadrilateris, ex aduerſo parallelis comprehenſum.

14. Si ſex plana ex aduerſo parallela ſint quadrata, ſolidum ijs comprehenſum, cubus erit.

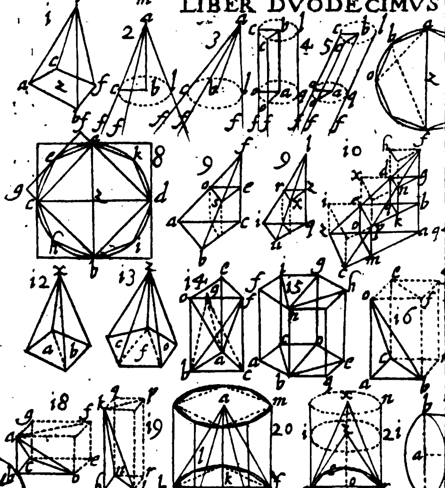
PRO-

Tabula 5.

LIBER VNDECIM



LIBER DVODECIMVS



OF MICH.

PROPOSITIO PRIMA.

Recta lineæ pars vna (A C) nequit eſſe in ſubiecto plano (O E) altera (C B) extra planum. Fig. 9.

Per ſe clarum eſt ex definitione plani, & lineæ rectæ. vide defin. 5. & 4. l. 1.

PROPOSITIO II.

Omne triangulum in vno eſt plano. Et duæ rectæ ſe mutuo ſecantes in eodem plano ſunt. Fig. 10.

Prima pars per ſe clara eſt, cum triangulum nihil ſit aliud, quam plana ſuperficies, tribus rectis comprehenſa. Ex quo etiam patet pars altera.

PROPOSITIO III.

Si duo plana (A B, C D) ſe mutuo ſecant; (E F) communis eorum ſectio eſt recta linea. Fig. 11.

Patet ex definitione plani. Licebit tamen ſic demonſtrare: ſi E F ſectio communis non eſt recta linea, ducatur in plano C D recta E O F, & in plano B A recta E Q F.

duæ

PROPOSITIO PRIMA.

Recta lineæ pars una (A C) nequit eſſe in ſubiecto plano (O E) altera (C B) extra planum. Fig. 9.

1. Per ſe clarum eſt ex definitione plani, & lineæ rectæ. vide defin. 5. & 4. l. 1.

PROPOSITIO II.

Omne triangulum in uno eſt plano. Et duæ rectæ ſe mutuo ſecantes in eodem plano ſunt. Fig. 10.

Prima pars per ſe clara eſt, cum triangulum nihil ſit aliud, quam plana ſuperficies, tribus rectis comprehenſa. Ex quo etiam patet pars altera.

PROPOSITIO III.

Si duo plana (A B, C D) ſe mutuo ſecant; (E F) communis eorum ſectio eſt recta linea. Fig. 11.

Patet ex definitione plani. Licebit tamen ſic demonſtrare: ſi E F ſectio communis non eſt recta linea, ducatur in plano C D recta E O F, & in plano B A recta E Q F.

duæ

duæ igitur rectæ E O F, E Q F claudent ſpacium. Quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 12. *SI recta (B A) duabus rectis) C A X, F A S) ſe mutuò ſecantibus, perpendicularis exiſtat, etiam plano per ipſas ducto perpendicularis erit.*

Si negas, alia recta B Q plano rectarum A C, A F ſit perpendicularis. Iunge A Q. & huic in plano F A C duc perpendicularem Q O. Hæc producta, neceſſario ſecabit *b* aliquam rectarum C A X, F A S vel vtramque, vbicunque tandem fuerit punctum, Q. ſecet ergo C A X in O; iungaturq; B O. Quoniam ergo angulus B A O per hyp. rectus eſt.

b Colligitur ex ſchol. poſt 31. l. 1.

a Per 47. l. 1 erit quad. B O. Æ. *a* quad. B A; quad. A O.

ſed quia B Q ponitur recta plano F A C, ac proinde *b* rectum facit cum A Q angulum B Q A, eſt

b Per defin. 3. l. 11.

c Per 47. l. 1 quad. B A. *c* Æ. quad. B Q, quad. A Q.

Et quia angulus A Q O per conſt. rectus eſt;

o Per eand. quad. A O. Æ. *o* quad. O Q, quad. A Q.

Ergo

Ergo quad. BO. æ. quad. BQ }
quad. OQ }
quad. AQ bis. }

Ergo quad. BO maius eſt BQ & OQ, ac proinde *d* angulus BQO rectus non eſt. Ergo BQ non eſt recta *e* plano CAF. Liquet ergo quæſitum.

d Patet ex eadem.
e Patet ex defin. 3 l. 11.

Scholium.

Ex eo quod ponebatur BQ eſſe recta plano FAC, directè eſt demonſtratum BQ non eſſe rectam plano FAC: ac proinde ex eo quod negaretur aſſertio theorematis, eadem aſſertio directè probata eſt. Hæc demonſtratio quoad ſubſtantiam eſt Ioannis Giermans

PROPOSITIO V.

Si tres rectæ (BA, CA, FA) eidem rectæ (AR) ad idem punctum (A) ſint perpendiculares; tres illæ erunt in vno plano.

Fig. 13.

Sit enim, ſi fieri poteſt, earum vna BA in alio plano RO, quod ſecet LQ planum duarum reliquarum CA, FA, rectâ AQ. Quoniam RA per hyp. perpendiculariter inſiſtit duabus CA, FA, plano LQ recta *a* erit. Ergo cum AO rectum facit *b* angulum RAQ. Sed etiam ex hyp. angulus

a Per præc.
b. Per defin. 3. l. 11.

R A B rectus eſt. Ergo anguli, R A B & R A O æquales ſunt. Quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 4.

Lineæ rectæ (A B, C D) quæ eidem plano (E F) ſunt perpendiculares, inter ſe ſunt parallelæ.

Poſtulari poterat vt per ſe notum; licebit tamen ſic demonſtrare.

Iunctâ B D, fac in plano F E, lineam D G normalem ad B D & parem B A, iunganturq; D A, G A, G B. Rectæ B D, D G æquantur B D, *a* B A, & anguli B D G, *b* D B A ſunt recti. Ergo A D, B G *c* ſunt æquales. Igitur triangula A B G, G D A ſibi mutuo æquilatera ſunt, ac proinde anguli A B G, A D G æquales. Sed A B G *e* rectus eſt. Quare & A D G rectus. Sunt vero & B D G ex conſtr. & C D G definit. 3. recti. Ergo G D ad tres C D, A D, B D, recta eſt. Ergo C D cum A D, B D eſt in vno *i* plano, ſed etiam A B cum A D, B D *o* in vno plano eſt. Ergo A B, C D ſunt in vno plano. Ergo cum anguli A B D, C D B, ſint *p* recti, erunt A B, C D *q* parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

a Per conſtr.
b Per defin. 3. l. 11.
c Per 4. l. 1.
e Per defin. 3. l. 11.
i Per præc.
o Per 2. l. 11.
p Per defin. 3. l. 11.
q Per 29. l. 1. & defin. 36. l. 1.

PROPOSITIO VII.

R*ecta (EF) ſecans rectas (AB, CD) poſitas in eodem plano, in vno eſt cum ipſis plano.* Fig. 15.

Poſtulari poterat. Qui volet ſic demonſtret.

Planum rectarum A B, C D ſecet aliud planum per puncta E, F, ſi iam E F non eſt in plano A B, C D, non erit E F communis ſectio. Sit ergo E G F. Ergo E G F *a* eſt linea recta. Duæ igitur rectæ E F, E G F concludunt ſpacium. Quod eſt abſurdum. a Per 3. *l.* 11.

Corollarium.

Hinc ſequitur ſi E F ſecat parallelas A B, C D, in eodem eſſe cum ipſis plano; omnes enim parallelæ *b* ſunt in vno plano. b Per *defin.* 36. *l.* 1.

PROPOSITIO VIII.

S*I parallelarum (AB, CD) vna (A B) plano (E F) ſit recta, etiam altera (C D) eidem plano erit recta.* Fig. 14.

Poterat poſtulari. Si demonſtratio quæritur, ferè ſimilis ea eſt demonſtrationi propoſitionis 6.

PROPOSITIO IX.

Fig. 16.

RECTÆ (AB, EF) quæ ſunt eidem rectæ (CD) parallelæ, licet non in eodem cum illa plano, etiam ſunt inter ſe parallelæ.

Quamuis poſtulari poſſet, licebit tamen ſic demonſtrare.

In plano parallelarum AB, CD, duc GK normalem ad CD. Item in plano parallelarum EF, CD, duc HK normalem ad CD. Ergo *a* CK recta eſt plano GKH. Ergo cum AG, EH ſint parallelæ ad CK erunt AG, EH *b* rectæ plano GKH. Ergo AG, EH *c* ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

a Per 4. l. 11.
b Per 8. l. 11.
c Per 6. l. 11.

PROPOSITIO X.

Fig. 17.

SI duæ rectæ (AC, BC) ſint parallelæ duabus rectis DF, EF; licet nō ſint in eodē plano, æquales angulos (C et F) comprehendunt.

Fiant CA, CB æquales FD, FE, & ducantur DE, AB, DA, FC, EB. Cum AC, FD ſint parallelæ & æquales, etiam AD, CF *a* parallelæ ſunt & æquales. Similiter

a Per 33. l. 1.

liter oſtendam B E, C F eſſe parallelas & æquales. Ergo etiam A D, B E, ſunt *b* parallelæ & *c* æquales. Æquantur *d* ergo A B, D E. Cum igitur triangula B A C, E D F ſibi mutuo ſint æquilatera, anguli C & F *e* æquales erunt. Quod erat demonſtrandũ.

b *Per præc.*
c *Per axio.* 1
d *Per* 33. *l.* 1.
e *Per* 8. *l.* 1.

PROPOSITIO XI.

AD planum datum (*A B*) *à dato extra illud puncto* (*C*) *perpendicularem ducere.*

Fig. 18.

Conſtr. in plano A B, duc quamuis D F, ad quam ex C perpendicularem deſcribe C E. Ad eandem per E, in plano A B perpendicularem duc A E M. Tum ad A M ex C perpendicularem demitte C G. Dico C G plano A B rectam eſſe.

Per G ponatur H G parallela ad D F.

Per conſt. D E recta eſt ad C E, & E M. Ergo D E recta *a* eſt plano C E M: adeoque & *b* H G. Ergo *c* C G recta eſt ad H G. Sed & C G ex conſt. recta eſt ad E M. Ergo C G *d* recta eſt plano A B. Quod erat propoſitum.

a *Per* 4. *l.* 11.
b 8. *l.* 11.
c *Per defin.* 3. *l.* 11.
d *Per* 4. *l.* 11.

PROPOSITIO XII.

EX dato plani (*E F*) *puncto* (*A*) *rectam ad datum planum erigere.*

Fig. 19.

A quouis extra planum E F puncto D, e Per præc. fac D B ad planum e E F rectam. Iunctaq; B A, duc A C parallelam D B. Dico factum. Demonſtratio patet ex 8.

Scholium.

PRacticè per datum punctum perpendicularis ducitur dato plano, ſi norma O K N *ad datum punctum applicetur.*

PROPOSITIO XIII.

Fig. 20. *LIneæ ex eodem puncto ductæ (D C, E C) nequeunt ambæ ad idem planum (A B) eſſe rectæ.*

Alias enim per 6. forent parallelæ. Quod fieri non poteſt.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 21. *SI eadem recta (A B) ad duo plana (F G, L Q) perpendicularis eſt, plana erunt parallela.*

Sumatur in planorum alterutro F G, quoduis punctum C, ex quo ducatur C E parallela ad A B, occurrens plano L Q in a Per 8. l. 11. E. Erit C E etiam a recta plano vtrique F G, L Q. Quare ſi iungantur rectæ A C, b Per defin. 3. l. 11. B E, erunt anguli A, B b recti. Ergo A C, c Per 29. l. 1. B E ſunt c parallelæ. Ergo A C E B parallelogrammum eſt, ac proinde C E, quam

iam

iam oſtendi vtrique plano eſſe perpendicularem; æquatur *d* A B. Eodem modo oſtendam omnes vtrique plano perpendiculares eſſe æquales, Ergo plana *e* ſunt parallela. Quod erat demonſtrandum.

d Per 34. l. 1.
e Per defin. 8. l. 11.

PROPOSITIO XV.

SI rectæ duæ ſe mutuo tangẽtes (B A, C A) ad duas alias ſe mutuo tangẽtes (E D, F D) ſint parallelæ, etiã plana per ipſas ducta erunt parallela.

Fig. 22.

Ex A ducatur AG recta ad planum EF, ponanturque G H, G I, parallelæ ad D E, D F. Erunt hæ *a* parallelæ etiam ad A B, A C. Cum igitur anguli I G A, H G A, ſint *b* recti, erunt etiam *c* C A G, B A G recti. Ergo G A, quæ ad planum E F eſt recta, etiã recta *d* eſt plano B C. Ergo plana *e* B C, E F ſunt parallela. Quod erat demonſtrandum.

a Per 9. l. 11.
b Per defin. 3. l. 11.
c Per 27. l. 1.
d Per 4. l. 11.
e Per præc.

PROPOSITIO XVI.

Planum (E H F G) ſecans parallela plana (A B, C D) in ijs facit ſectiones (E H, G F) parallelas:

Fig. 23.

Si non: cum ſint in eodem plano ſecante, conuenient *o* alicubi in I. Quare cum tota

o Per ſchol. poſt. 31. l. 1.

a Per 1.l.11 totæ H B I, F G I ſint a in planis A B, C D, productis, etiã hæc conuenient in I. Quod eſt abſurdum contra definitionem 8. huius.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 24. *PArallela plana rectas lineas (B D & HG) proportionaliter ſecant.*

Ducantur in planis P Q, T V rectæ B H D G, item B G occurrens plano R S in F, iunganturque F C, F I. Planum trianguli B G D ſecãs parallela plana, facit ſectiones
a Per præc. C F, D G a parallelas. Ergo eſt B C ad
b Per 2.l.6. C D, vt b B F ad F G. Rurſum triangulum B H G ſecans parallela plana facit, ſectio-
c Per præc. nes c B H, F I parallelas. Ergo eſt H I ad
d Per 2.l.6. I G, vt d B F ad F G; hoc eſt (quod iam oſtendi) vt B C ad C D. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 25. *SI recta linea (F E) ſit ad planum (A B) recta, omnia, quæ per ipſam ducuntur plana, ſunt eidem plano (A B) recta.*

Ductum ſit per F E planũ aliquod G C faciens cum A B ſectionem C D. In hoc ducantur H K normales ad C D ſectionem

com-

communem. Cum igitur etiam *o* F E, recta ſit ad C D; erunt K H *a* parallelæ ad F E. Sed F E ponitur recta plano A B. Ergo & H K rectæ *b* ſunt plano A D. Ergo G C planum *c* plano A B rectum eſt.

o Per hyp. & defin. 3. l. 11.
a Per 29. l. 1.
b Per 8. l. 11.
c Per defin. 4. l. 11.

PROPOSITIO XIX.

SI duo plana (M F, G D, ſe ſecantia, ſint ambo recta eidem plano (A B:) erit etiam communis illorum ſectio (K L) recta plano (A B.)

Fig. 26.

Quoniam planum M F ponitur rectum plano A B; ex def. 4. patet ex puncto L, poſſe in plano M F duci rectam perpendicularem plano A B, eam nempè quæ ex L eſſet in plano M F perpendicularis ad communem ſectionem E F. Similiter, quia planum G D ponitur perpendiculare ad A B, ex def. 4. patet in plano G D poſſe duci ex puncto L perpendicularem plano A B. Sed ex puncto L tantum *a* vna poteſt duci perpendicularis plano A B. Ergo neceſſe eſt, vt recta quæ ex L perpendicularis eſt plano A B, exiſtat in vtroq; plano M F & G D, ac proinde ſit ipſa planorum M F & G D communis ſectio L K. Quod erat demonſtrandum.

a Per 13. l. 11.

PRO-

PROPOSITIO XX.

Fig. 27.

SI angulus ſolidus (A) tribus planis angulis (B A C, C A D, D A B) continetur, horum duo quilibet reliquo ſunt maiores.

Si tres plani ſunt æquales, patet aſſertio, ſi inæquales, maximus eſto B A D. Hic nihilominus minor eſt duobus reliquis. Ex maximo enim B A D abſcinde B A E parem B A C, fiantq; æquales A C, A E. Per E ducatur recta occurrens ipſis A B, A D in B & D, iunganturq; B C, D C. Quoniam anguli ° B A E, B A C æquales ſunt, & latera B A, A E, æqualia lateribus B A, A C, etiam baſes B E, B C, æquales ᵃ erunt. Quoniam verò B C, C D ° maiores ſunt quam B D, ablatis æqualibus B E, B C, remanet C D maior quã E D. Sed latera E A, A D, æquantur lateribus ᵇ C A, A D. Ergo angulus ᶜ C A D maior eſt quam E A D. Sed igitur B A C par ſit oſtenſus B A E. Erunt duo ſimul B A C, C A D maiores toto B A D. Quod erat demonſtrandum.

° Per conſt.
a Per 4. l. 1.
° Per 20. l. 1.
b Per conſtr.
c Per 25. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXI.

Plani anguli, ſolidum angulum quemcunque componentes, quatuor rectis ſunt minores. Fig. 28.

Eſto ſolidus angulus A, planis angulis illum componentibus ſubtendantur rectæ B C, C D, D E, E F, F B, in vno plano exiſtentes. Quo facto conſtituitur pyramis, cuius baſis eſt polygonum B C D E F, vertex A, totq; cincta triangulis G, H, I, K, L, quot plani anguli componunt ſolidum A. Iam vero quia duo anguli A B F, A B C *a* maiores ſunt vno F B C, & duo A C B, A C D maiores vno B C D & ſic deinceps; erunt triangulorum G, H, I, K, L, circa baſim anguli ſimul ſumpti omnibus ſimul angulis baſeos B, C, D, E, F maiores. Sed anguli baſeos vna cum quatuor rectis faciunt bis tot rectos, *b* quot ſunt latera, ſiue quot triangula. Ergo omnes triangulorum circa baſim anguli, vna cum quatuor rectis cōficiunt amplius quā bis tot rectos, quot ſunt triangula. Sed iidem anguli circa baſim, vna cum angulis qui componunt ſolidum, componunt bis *c* tot rectos quot ſunt triangula. Liquet ergo angulos ſolidum angulum A componentes quatuor rectis eſſe minores. Quod erat demonſtrandum.

a Per præc.

b Per theor. 2. ſchol. poſt 32. l. 1.

c Patet ex 32. l. 1.

Corollarium.

EX hac & præcedenti ſatis colligitur q tribus angulis planis, rectis quatuor mi- noribus, quorum duo quilibet reliquo ſu maiores, ſolidum angulum conſtitui poſſe.

Scholium.

EX hac eâdem propoſitione demonſtratur ce- bre theorema: tres tantùm figuræ planæ o dinatæ, & æquales, corpus continere poſſunt, n mirum æquilateræ triangula vel 4. vel 8. vel 20. Quadrata 6. pentagona 12. Ac proinde quin tantum ſunt ordinata, ſeu regularia corpora. P ramis, quæ 4. Tetraëdrum quod 8. Icoſaëdru quod 20. æquilateris triangulis continetur; Cu qui 6. quadratis, Dodecaëdrum quod 12. æqu bus pentagonis ordinatis comprehenditur. P corpus ordinatum dicetur, quod planis ordina & æqualibus continetur.

Demonſt. Ex duobus æquilateris triangulis n poteſt conſtitui angulus ſolidus, ad hoc enim ſalt requiruntur tres.

A tribus triangulis æquilateris in unum pun coeuntibus, poteſt conſtitui angulus ſolidus pyr midis; ex quatuor, angulus ſolidus octaëdri; quinq; angulus ſolidus Icoſaëdri, cum æquila trianguli anguli tum 3. tum 4. tum 5. ſint 4. r ctis minores, ut colligitur ex coroll. 12. p. 32. l

Quoni

Quoniam verò tres anguli pentagonici b ſunt rectis minores, poterunt tria pentagona in vnũ
b Collig. ex corol. p.11.l.4.
[illegible]ctum coeuntia conſtituere ſolidum angulum, [illegible]mpè Dodecaëdri.

[illegible]A tribus quadratis in vnum punctum coeunti[illegible] effici ſolidum angulum cubi, per ſe patet. Atq; [illegible] quinque exſurgunt regularia corpora.

Præter hæc nulla eſſe alia ſic oſtenditur.

Sex anguli trianguli æquilateri conficiunt 4. [illegible]ctos, vnus enim facit duas c tertias recti [illegible] [illegible]e ſex tales efficient 12. tertias recti, hoc eſt re[illegible] 4. Ergo, à ſex æquilateris triangulis non pote[illegible] effici ſolidus angulus, multò minus à pluribus.
c Per corol. 12.p.32.l.1.

A quatuor quadratis, non poſſe conſtitui ſolidũ [illegible]gulum, ac multò minus à pluribus per ſe patet.

Anguli pentagonici 4. ſunt 4. rectis maiores, [illegible] enim efficiunt 6. quintas e recti. Ergo à [illegible]tuor pentagonis nequit fieri angulus ſolidus, [illegible]ltò minus à pluribus.
e Per corol. p.11.l.4.

Nec ſanè ex alijs figuris quibuſlibet ordinatis [illegible]itui poterit ſolidus angulus. Tres anguli hexa[illegible]nici f ſunt 4. rectis æquales, vnus enim facit 4. [illegible]tias recti, ac proinde tres faciũt 12. tertias recti [illegible] eſt 4. rectos. Ergo ex tribus hexagonis nequit [illegible]ſtitui ſolidus angulus, multò minus à pluribus.
f Per corol. 2.p.15.l.4.

[illegible] verò tres anguli hexagonici ſint 4. rectis [illegible]ales, tres anguli figurarũ quarumlibet hexa[illegible] maiorũ, vt ſeptagoni, octagoni, &c. 4. rectis [illegible]ores erunt. Quare manifeſtũ eſt reliquas figu[illegible] ordinatas, omnes eſſe ineptas vt ſolidũ angu-

lum

lum conſtituant, adeoq; præter iam dicta 5. nulla ordinata corpora dari poſſe.

PROPOSITIO XXII. XXIII.

ADmodum prolixæ ſunt ac moleſtæ tyronibus, & ferè vſu non veniunt.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 29. *PLana parallelepipedum cõtinentia (1.) ſunt parallelogramma. (2.) quæ ex aduerſo, ſunt ſimilia et (3.) æqualia.*

1. Pars. Planum A F ſecans plana B D, F H ex defin. 13. parallela facit a ſectiones B A, F E parallelas. Rurſum planum A ſecans plana A H, B G per defin. 13. parallela; facit b ſectiones A E B F parallelas. Ergo B E F A parallelogrammum eſt. Simili argumento reliqua parallelepipedi plana ſunt parallelogramma.

a Per 16. l. 11.

b Per eand.

2. Pars. Quoniam ex prima parte pa AB, B C parallelas eſſe E F, F G, erunt anguli A B C, E F G pares. Quare cum latera alternis ſint paria, ſimilia ſunt parallelogramma aduerſa B D, F H. Eodem modo probatur de cæteris oppoſitis.

c Per 10. l. 11.

3. Pars patet ex prima parte, & 4. vel

PR

PROPOSITIO XXV.

SI parallelepipedum (G F D I) aut quoduis priſma plano (N P) ſecetur aduerſis planis parallelo; erit vt baſis (D C P O) ad baſim (O P F E) ita ſolidum (G P) ad ſolidum (N F.) Fig. 30.

Demonſtrabitur eodem modo, quo 1.6.

Corollarium.

Priſma ſectum plano aduerſis planis parallelo, ſectionem habet ſimilem & æqualem planis aduerſis.

PROPOSIT. XXVI. XXVII.

NOn ſunt neceſſariæ.

PROPOSITIO XXVIII.

PLanum per aduerſorum planorum diametros (A C, E G) tranſiens, parallelepipedum ſecat in duo æqualia priſmata. Fig. 29.

Quoniam *a* B G, B E ſunt parallelogramma; C G, A E æquidiſtant eidem B F. Ergo & *b* inter ſe ſunt parallelæ, ac proinde in vno ſunt plano. Ergo rectæ A C, E G

a Per 24. l. 11.

b Per 9. l. 11.

c in

Corollarium.

EX hac & præcedenti ſatis colligitur ex tribus angulis planis, rectis quatuor minoribus, quorum duo quilibet reliquo ſint maiores, ſolidum angulum conſtitui poſſe.

Scholium.

EX hac eâdem propoſitione demonſtratur celebre theorema: tres tantùm figuræ planæ ordinatæ, & æquales, corpus continere poſſunt, nimirum æquilateratriangula vel 4. vel 8. vel 20. Quadrata 6. pentagona 12. Ac proinde quinque tantum ſunt ordinata, ſeu regularia corpora. Pyramus, quæ 4. Tetraëdrum quod 8. Icoſaëdrum quod 20. æquilateris triangulis continetur; Cubus, qui 6. quadratis, Dodecaëdrum quod 12. æqualibus pentagonis ordinatis comprehenditur. Porro corpus ordinatum dicetur, quod planis ordinatis & æqualibus continetur.

Demonſt. Ex duobus æquilateris triangulis non poteſt conſtitui angulus ſolidus, ad hoc enim ſaltem requiruntur tres.

A tribus triangulis æquilateris in vnum punctū coeuntibus, poteſt conſtitui angulus ſolidus pyramidis; ex quatuor, angulus ſolidus octaëdri; ex quinq; angulus ſolidus Icoſaëdri, cum æquilateri trianguli anguli tum 3. tum 4. tum 5. ſint 4. rectis minores, vt colligitur ex coroll. 12. p. 32. l. 1.

Quoniam

Quoniam verò tres anguli pentagonici b ſunt 4. rectis minores, poterunt tria pentagona in vnũ punctum coeuntia conſtituere ſolidum angulum, nempè Dodecaëdri. b Colligitur ex corol. p.11.l.4.

A tribus quadratis in vnum punctum coeuntibus effici ſolidum angulum cubi, per ſe patet: Atq; ita quinque exſurgunt regularia corpora.

Præter hæc nulla eſſe alia ſic oſtenditur.

Sex anguli trianguli æquilateri conficiunt 4. rectos, vnus enim facit duas o tertias rectis æquales: vnde ſex tales efficient 12. tertias recti, hoc eſt rectos 4. Ergo, à ſex æquilateris triangulis non poterit effici ſolidus angulus, multò minus à pluribus. o Per corol. 12.p.32.l.1.

A quatuor quadratis, non poſſe conſtitui ſolidũ angulum, ac multò minus à pluribus per ſe patet.

Anguli pentagonici 4. ſunt 4. rectis maiores, ſinguli enim efficiunt 6. quintas e recti. Ergo à quatuor pentagonis nequit fieri angulus ſolidus, multò minus à pluribus. e Per corol. p.11.l.4.

Nec ſanè ex alijs figuris quibuſlibet ordinatis cõſtitui poterit ſolidus angulus. Tres anguli hexagonici f ſunt 4. rectis æquales, vnus enim facit 4. tertias recti, ac proinde tres faciũt 12. tertias recti hoc eſt 4. rectos. Ergò ex tribus hexagonis nequit conſtitui ſolidus angulus, multò minus à pluribus. f Per corol. 2.p.15.l.4.

Cum vero tres anguli hexagonici ſint 4. rectis æquales, tres anguli figurarũ quarumlibet hexagono maiorũ, vt ſeptagoni, octagoni, &c. 4. rectis maiores erunt. Quare manifeſtũ eſt reliquas figuras ordinatas, omnes eſſe ineptas vt ſolidũ angulum

lum conſtituant, adeoq́ꝫ præter iam dicta 5. nulla ordinata corpora dari poſſe.

PROPOSITIO XXII. XXIII.

ADmodum prolixæ ſunt ac moleſtæ tyronibus, & ferè uſu non veniunt.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 29. *PLana parallelepipedum cõtinentia (1.) ſunt parallelogramma. (2.) quæ ex aduerſo, ſunt ſimilia et (3.) æqualia.*

1. Pars. Planum A F ſecans plana B D, F H ex defin. 13. parallela facit a ſectiones B A, F E parallelas. Rurſum planum A F ſecans plana A H, B G per defin. 13. parallela; facit b ſectiones A E B F parallelas. Ergo B E F A parallelogrammum eſt. Simili argumento reliqua parallelepipedi plana ſunt parallelogramma.

a Per 16. l. 11.

b Per eand.

2. Pars. Quoniam ex prima parte patet A B, B C parallelas eſſe E F, F G, erunt c anguli A B C, E F G pares. Quare cum & latera alternis ſint paria, ſimilia ſunt parallelogramma aduerſa B D, F H. Eodem modo probatur de cæteris oppoſitis.

c Per 10. l. 11.

3. Pars patet ex prima parte, & 4. vel 8. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

SI parallelepipedum (G F D I) aut quoduis priſma plano (N P) ſecetur aduerſis planis parallelo; erit vt baſis (D C P O) ad baſim (O P F E) ita ſolidum (G P) ad ſolidum (N F.) Fig. 30.

Demonſtrabitur eodem modo, quo 1. 6.

Corollarium.

Priſma ſectum plano aduerſis planis parallelo, ſectionem habet ſimilem & æqualem planis aduerſis.

PROPOSIT. XXVI. XXVII.

NOn ſunt neceſſariæ.

PROPOSITIO XXVIII.

PLanum per aduerſorum planorum diametros (A C, E G) tranſiens, parallelepipedum ſecat in duo æqualia priſmata. Fig. 29.

Quoniam *a* B G, B E ſunt parallelogramma; C G, A E æquidiſtant eidem B F. Ergo & *b* inter ſe ſunt parallelæ, ac proinde in vno ſunt plano. Ergo rectæ A C, E G a Per 24. l. 11. b Per 9. l. 11.

c in

c Per 7. li. 11. c in vno ſunt plano: Iam verò planum per illas ductum ſecare parallelepipedū in duo priſmata æqualia. Sic oſtendo. Intelligatur priſma A E G C D H ſupra planum ſuum E A C G ita conſtitui, vt anguli D, H vergant ad angulos B, F. Manifeſtum eſt tum adhuc fore inter parallela plana B A D C, F E H G. Tum verò neceſſe eſt, vt D cadat in B, & H in F. Cadat enim D extra B, ſi fieri poteſt, in N. Angulus B A C

d Per 27. li. 1. æquatur d angulo D C A. Sed D C A æquatur N A C (eſt enim vnus idemque angulus.) Ergo B A C & N A C æquales ſunt: quod eſt abſurdum. Ergo D incidit in B, &

e Per ax. 7. pari de cauſa H e in F. Ergo priſma A E G C D H congruit priſmati A C G E F B ac proinde e æqualia ſunt.

PROPOSIT. XXIX. & XXX.

Fig. 31. *Parallelepipeda (F E A G K I M C & F E B H L O M I) quæ eandem habent baſim (E F I M) & altitudinē eandem, ac proinde exiſtunt inter parallela plana (E F I M, G A O L) æqualia ſunt.*

Vel enim exiſtunt inter lateralia parallela plana E A O M, & F G L I, vel non. Eſto primū. Ex 24. huius, & 8. l. 1. patet triangula A E B, C M O, item G F H, K I L ſibi

mutuò

mutuò æquilatera & æquiangula eſſe. Quare vt in præcedenti, oſtendã priſmata C M O L I K, A E B H F G ſibi mutuo impoſita congruere, ac proinde *a* æqualia eſſe. Quare addito communi ſolido F E B H K C M I, tota parallelepipeda F E A G K I M C, F E B H L O M I æqualia erunt. Quod erat dem.

a *Per axio.* 7.

Sit deinde parallelepipedum F X Q E M I P R non inter eadem lateralia plana parallela exiſtens cum parallelepipedo F E A G K C M I. Quoniam ex hypotheſi G K, A C, R P, Q X ſunt in vno plano ad baſim E F I M parallelo, R P, Q X ſecent G K in L & H; A C verò in O & B, iunganturque E B, M O, F H, I L; facilè oſtenſu eſt plana ſolidum F E B H L O M I cõtinentia parallelogramma eſſe ex aduerſo æquidiſtantia, adeoque ſolidum illud *c* eſſe parallelepipedum. Sed huic per primam partem parallelepipeda F X Q E M I P R, & F E A G K C M I, ſunt æqualia. Ergo etiã ſunt æqualia inter ſe. Quod erat dem.

Fig. 32.

c *Per deſin.* 13. *l.* 11.

Scholium.

HÆc propoſitio ſimilis eſt propoſitioni 35. *lib.* 1. *affirmat enim de ſolidis, quod illa de planis. Quare ſimilis etiam erit reliquorum caſuum demonſtratio.*

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 43.

Parallelepipeda ſuper æqualibus baſibus (A O & E G) & in eadem altitudine (S) ſunt æqualia.

Habeant parallelepipeda primò latera ad baſes normalia. Ad latus F G productum fiat parallelogrammum G M K H æquale ac ſimile parallelogrammo A O, perfectoque parallelogrāmo G M P R, rectæ P M. R G occurrant ipſi K H in Q & L. Iam verò intelligantur ſuper G K, G Q, G P, conſtitui parallelepipeda, quorū latera ſint ad baſes recta, altitudo autem omnium cōmunis ſit. S. ſolidum E G S eſt ad ſolidum G P S, vt E G b ad G P; hoc eſt (quia E G, A O per hyp. æquantur) vt A O ad G P; hoc eſt per conſtr. vt G K ad G P; hoc eſt vt c G Q ad G P; hoc eſt d vt ſolidū G Q S eſt ad idem ſolidum G P S. Quoniam igitur ſolida E G S & G Q S eandem habent rationem ad ſolidum G P S, erit ſolidum E G S o æquale G Q S; hoc eſt ſolido e G K S; hoc eſt (quia baſes G K, A O ſunt f æquales & ſimiles) ſolido i A O S. Quod erat propoſitum. *Per totum diſcurſum ſolida aſſumuntur recta.*

b *Per 25. l.11.*
c *Per 35. l.1.*
d *Per 25. l.11.*
o *Per 9. l.5.*
e *Per 29. l.11.*
f *Per conſtr.*
i *Patet ex 29. l.11. imò per ſe.*

Habeant deinde parallelepipeda data E G S,

E G S, A O S latera ad baſes E G & A O obliqua. Fiant ſuper E G, A O parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta in altitudine S, hæc æqualia erunt obliquis per 29. aut 30. Quare cum parallelepipeda recta per primam partem ſint paria inter ſe, erunt & obliqua æqualia. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXII.

PArallelepipeda quæuis æquè alta, ſunt inter ſe vt baſes, *Fig. 34.*

Baſes ſint G O, & A ſuper C O fac parallelogrammum O E par ipſi A.

Super B C, O E intelligantur erigi parallelepipeda in altitudine K: hæc igitur partes erunt vnius parallelepipedi B E K. Ergo *a* parallelepipedum O E K eſt ad parallelepipedum B C K, vt baſis O E ad baſim B C; hoe *b* eſt vt baſis A ad baſim B C. Sed quia baſes O E & A ſunt æquales, parallelepipeda O E K & A K *c* æqualia ſunt. Ergo etiam parallelepipedum A K eſt ad parallelepipedum B C K, vt baſis A ad baſim B C. Quod erat demonſtrandum.

a *Per 25. l. 11.*
b *Per conſtr.*
c *Per præc.*

Scholium.

Quod hic de parallelepipedis oſtenſum eſt, demonſtrabitur in libro 12. de pyramidibus prop. 6. de quibuſlibet priſmatibus in corollario 1. poſt p. 9. de conis & cylindris prop. 11.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 35.

Similia parallelepipeda (H A et G M) ſunt in triplicata ratione laterum homologorum (A B, B C.)

Sint parallelepipeda A H, C M ſimilia. Ergo omnia ipſorum plana ſimilia *a* ſunt; adeoque A B ad B C *b* eſt vt E B ad B O; & vt F B ad B G, ſic E B ad B O. Inſuper, & anguli *c* planorum æquales ſunt. Collocentur ſic igitur ſolida A H, C M vt æquales anguli C B O, A B E ſint oppoſiti, & latera A B, C B indirectum; tum verò etiam *d* E B, O B indirectum erunt. Cogitentur iam ſuper planis B Q & E C facta ſolida, ſic vt ſolida K B, H A, ſint vnum parallelepipedum, & K B, P Q faciant vnum ſimiliter parallelepipedum, & P O, C M vnum quoque parallelepipedum conficiant. Solidum H A eſt ad ſolidum K B, *e* vt A E ad B R; hoc eſt vt *f* A B ad B C; hoc eſt (vt per hyp. oſtendi ſupra) vt E B ad B O; hoc eſt vt *g* E G ad B Q; hoc eſt vt ſolidū *h* idem K B ad

a Per defin. 9. l. 11.
b Per defin. 1. l. 6.
c Per eand.
d Patet ex 15. l. 11.
e Per 25. l. 11
f Per 1. l. 6.
g Per eand.
h Per 25. l. 11

ad ſolidum P O. Continuant ergo eandem rationẽ tria ſolida H A, K B, P O. Iam verò ſolidum K B eſt ad ſolidum P O, vt *k* baſis B R ad baſim B Q, hoc eſt vt *l* E B ad B O, hoc eſt, vt *m* F B ad B G, hoc eſt, *n* vt planum F C ad planum B S, hoc eſt, vt idẽ *o* rurſus ſolidum P O ad C M ſolidum. Quatuor ergo ſolida H A, K B, P O, C M, ſunt continuè proportionalia. Ergo ratio primi H A ad quartum C M eſt *p* triplicata rationis primi H A ad K B ſecundum, hoc eſt *q* rationis A B ad B R, hoc eſt *r* rationis homologorum laterum A B ad B C. Quod erat demonſtrandum.

k *Per eand.*
l *Per* 1. *l.* 6.
m *Oſtendi ſupra ex hyp.*
n *Per* 1. *l.* 6.
o *Per* 25. *l.* 11.
p *Per defin.* 10. *l.* 5.
q *Per* 25. *l.* 11
r *Per* 1. *l.* 6.

Scholium.

Qvod hic de parallelepipedis oſtenſum eſt, in libro 12. *demonſtrabitur de pyramidibus propoſ.* 8. *de quibuſlibet priſmatibus, coroll.* 2. *poſt p.* 9. *de conis & cylindris p.* 12. *de ſphaeris p.* 18.

PROPOSITIO XXXIV.

Si parallelepipeda æqualia ſũt (B M, C K,) reciprocant baſes & altitudines (hoc eſt, baſis A M eſt ad baſim E K, vt reciprocè altitudo F C ad altitudinem A B.)

Fig. 36.

Et ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.

1. Pars. Sint primo latera ad baſes recta. Si iam ſolidorum B M, C K altitudines ſint pares, res patet.

Si altitudines ſint inæquales, à maiori F C abſcinde F E parem B A: & per E duc planum E L ad F K parallelum. Baſis A M eſt ad baſim F K, vt ſolidum *b* B M ad ſolidū E K; hoc eſt (quod ex hyp. paria ſint ſolida B M, C K) vt ſolidum C K ad E K. Solidum; hoc eſt vt *c* C G ad E G; hoc eſt vt *d* C F ad E F; hoc eſt ex conſtr. vt C F reciprocè ad B A. Quod erat demonſt.

b Per 32. l. 11.

c Per 25. l. 11.

d Per 1. l. 6.

Sint deinde latera ad baſes, obliqua. Erigantur ſuper ijſdem baſibus in altitudine eadem parallelepipeda recta. Erunt his obliqua *e* parallelepipeda æqualia. Quare cum hæc per 1. partem reciprocent baſes & altitudines, etiam illa reciprocabunt. Quod erat demonſtrandum.

e Per 29. & 30. l. 11.

2. Pars. Sint altitudines inæquales, lateraque ad baſes recta, & ex maiori C F ipſi B A ſume parem E F. Solidum B M eſt ad ſolidum E K, vt *f* A M ad F K; hoc eſt ex hyp. vt C F ad B A; hoc eſt ex conſtr. vt C F ad E F; hoc eſt vt *g* C G ad E G; hoc eſt vt ſolidum *i* C K ad ſolidum idem E K. Ergo ſolida B M & C K eandem habent rationem ad E K. Ergo ſunt paria. Quod erat demonſtrandum.

f Per 32. l. 11

g Per 1. l. 6.

i Per 25. l. 11

Corol-

Corollaria.

QVæ de parallelepipedis demonſtrata ſunt Prop.29. 30.31.32.33.34. etiam conueniunt priſmatis triangularibus, quæ ſunt dimidia parallelepipeda, vt patet ex p.28 Igitur.

1. Priſmata triangularia æquè alta ſunt vt baſes A, B. *Fig.37.*

2. Si ſimilia fuerint, eorum proportio triplicata eſt proportionis laterum æqualibus angulis oppoſitorum.

4. Si æqualia ſunt, reciprocant baſes & altitudines: & ſi reciprocant baſes & altitudines, æqualia ſunt.

Scholium.

QVod hic propoſ. 34. oſtenſum eſt de parallelepipedis, demonſtrabitur in libro 12. de pyramidibus p.9. de priſmatis quibuſcunq; coroll.3. poſt.p.9. de conis & cylindris.p.15.

PROPOSITIO XXXV.

VAldè prolixa, ſeruit ſequenti, quam ſine illa demonſtrabimus.

PROPOSITIO XXXVI.

PArallelepipedum (DH) ex tribus rectis proportionalibus (A,B,C) factũ *Fig 38.*

æquatur parallelepipedo (I N) facto à mediâ (B) & æquiangulo priori.

Parallelepipedi D H, baſis F D, habeat latus E F æquale A, & latus alterum E D æquale C: latus verò E G, baſi inſiſtens, æquale mediæ, B. Erit parallelepipedum D H factum ex tribus rectis A, B, C. Parallelepipedi deinde, I N, tria latera L X, I X, X M (ac proinde omnia reliqua) ſint æqualia mediæ B; & angulus ſolidus X ſit æqualis angulo ſolido E. Erit parallelepipedum IN factum ex media B, & priori æquiangulū. Dico etiam eſſe æquale.

Cum enim per hyp. & conſtr. ſit vt F E ad L X, ita reciprocè I X ad D E, erunt *a* baſes D F, I L æquales. Iam quia anguli ſolidi ad E & X ſunt æquales, ſi ponantur intra inuicem, *b* congruent, & ob æqualitatem rectarum E G, X M, puncta M, G, coincident. Quare vna erit vtriuſque ſolidi altitudo, perpēdicularis nempè à punctis M, G, iam congruentibus, in planum baſeos demiſſa. Solida *c* igitur D H, I N, æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

a *Per* 14. *l.* 6

b *Per defin.* 11. *l.* 11.

c *Per* 31. *l.* 11

Scholium.

Hic porro obſeruabimus, id quod magnum habet vſum, ex tribus lineis quomodocunque inter ſe ductis, eiuſdē magnitudinis ſolidum gigni.

A B C.

ABC. CAB. BCA.
1 2 3

In ſcemate hic appoſito duæ primæ litteræ deſignant baſim; tertia altitudinem. Comparemus primum cum ſecundo.

Baſis AB eſt ad baſim CA per 2.6. ut B latus ad C latus; hoc eſt reciproce ut B altitudo ad C altitudinem. Ergo per 34.

ABC. æ. CAB.

Eodem modo oſtendes primum tertio, & tertium ſecundo eſſe æqualia.

PROPOSITIO XXXVII.

PArallelepipeda ſimilia ſimiliterque à lineis proportionalibus deſcripta, etiam ipſa ſunt proportionalia: & è conuerſo.

Patet ex 34.l.5. Rationes enim parallelepipedorum per 33.huius erunt duplicatæ rationum ex hyp. æqualium, quas habent lineæ.

Conuerſa patet ex 35.l.5.

Propoſitio vera eſt de quibuſcunque ſimilibus corporibus, quæ patebit l.12. duplicatam habere laterum rationem.

PRO-

PROPOS. XXXVIII. & XXXIX.

Nihil continent memorabile, et vix vllius ſunt vſus.

PROPOSITIO XL.

Fig. 39. & 40. *Si fuerint duo priſmata triangularia æqualis altitudinis (A B F G O C et I K L P X Q) quorum vnum baſim habeat parallelogrammum (O B) duplam baſeos alterius (I K L) quæ triangula ſit; priſmata erunt æqualia.*

Nam ſi perficiantur parallelepipeda KR & C H, erunt hæc æqualia a ob baſiū C A, M K & altitudinum æqualitatem. Ergo etiam priſmata ipſorum b dimidia æqualia erunt. Quod erat demonſtrandum.

a Per 31. l. 11

b Per 28. l. 11.

Scholium.

Ex hactenus demonſtratis habetur dimenſio priſmatum triangularium, & quadrangularium, ſeu parallelepipedorum, ſi nimirū altitudo ducatur in baſim, vt ſi altitudo ſit 10. *pedum, baſis verò pedum quadratorum* 100. *(menſurabitur autem baſis per ſchol. p.* 36. *vel* 41. *l.* 1.) *multiplica* 10. *per* 100. *proueniunt* 1000. *pedes cubici pro ſoliditate priſmatis dati.*

De-

Demonſtratio facilis eſt. Nam quemadmodum rectangulum, ita & parallelepipedum rectum producitur ex altitudine ducta in baſim. Ergo etiam quoduis parallelepipedum producitur ex altitudine in baſim ducta, cùm per 31. æquale ſit parallelepipedo recto ſuper eadem baſi ad eandem altitudinem conſtituto.

Deinde cum totum parallelepipedum producatur ex altitudine in totam baſim; ſemiſſis parallelepipedi (hoc eſt priſma triangulare per 28.) producetur ex altitudine ducta in dimidiam baſim, triangulum nempè I L K.

ELEMENTORVM GEOMETRIÆ LIBER DVODECIMVS,

NOBIS OCTAVVS.

Quod in libris præcedentibus hactenus præſtare conati ſumus, vt Mathematum elementa ad faciliorem ac breuiorem methodum reuocaremus; id imprimis præſtādum erit in hoc libro duodecimo, cuius doctrina cum maximè ſit neceſſaria, demonſtrationes adeò ſunt prolixæ, vt tyrones in deſperationē plerumque coniiciant. Huic incommodo ita mederi propoſitum nobis eſt; vt tamen à rigore Geometricæ demonſtrationis non recedamus. Quod vtrum ſimus aſſecuti, lector intelliget, ſi hæc noſtra cum Euclidæâ prolixitate contulerit.

DEFINITIONES.

Fig. 1. lib. 12 tabulâ 5.

1. PYramis eſt ſolidum (Z L) triangulis (A L C, C L F, F L B, B L A) comprehenſum ab vno plano (Z) ad vnum punctum (L) conſtitutis.

2. Planum Z baſis dicitur, & eſſe poteſt vel triangulum, vel quadrangulum, vel quæuis

alia

o E,K,I,H; inſcribe octogonum: & in E angat F G, cui B C, D A occurrant in G & F: erit C F parallelogrammũ, cuius cum imidium ſit triangulum *b* C E A, erit hoc lus quam dimidium ſegmenti C E A. Eo- em modo ſingula triangula A K D, D I B tc. ſingulorum ſegmentorum plus ſunt quã imidia. Ergo omnia triangula omniũ ſeg- entorum plus quam dimidia ſunt. Hæc rgo ſi ex illis, hoc eſt ex reſiduo circuli au- ras, plus quam dimidium auferetur. Pari gumento ſi inſcribantur circulo polygo- a duplo ſemper plurium laterum oſtẽdam reſiduo circuli ſemper auferri plus quam imidium. Ergo reſiduum erit tandem *c* mi- us quocunq; dato, ac proinde polygona ſcripta tandem à circulo deficient quan- tate minori, datâ quâcunque, hoc eſt in rculum *o* deſinent. Quod erat demonſtr.

b *Per 41. l. 1*

c *Patet ex lem. 2. Schol. poſt 11. l. 6.*

o *Per defin.*

PROPOSITIO II.

Irculorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum. *Fig. 6. & 7.*

Polygonorum ſimilium circulo ſine fine ſcriptorum proportio ſemper duplicata eſt proportionis diametrorum. Atqui po- gona circulo in infinitum inſcripta, in cir- lũ *b* deſinunt. Ergo per poriſma vniuer- e ſequens, etiam circulorum proportio,

a *Per 1. l. 12.*

b *Per lem.*

duplicata eſt proportionis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

Poriſma univerſale.

SI ea quæ duabus figuris (A, B) inſcribuntur, in ipſas deſinant, quam proportionem inter ſe ſemper habent inſcripta, eandem habent & figuræ.

R

A B X.Z.

C F

Sit ratio X ad Z, et quam inſcripta ſemper habent inter ſe. Si ergo negas rationem figurarũ A, B, eandem eſſe cum ratione X ad Z, quã ſemper habent ea, quæ figuris inſcribuntur, ſit ratio A ad B primo maior ratione X ad Z. Ergo alia quædam quantitas R minor quam figura A, erit ad figuram B, vt X ad Z. Quoniam inſcripta per hyp. deſinunt in figuras A & B, erunt aliqua figuris A & B inſcripta, quæ ab ipſis deficiant [a] minori quantitate, quam R deficiat à figura B. Sint ea, C & F. Ergo C erit maius quã R. Ergo C eſt ad B in [b] maiori, quam R ad B; hoc eſt (ut ponebatur) quam X ad Z, hoc eſt per hyp. quam idem C ad F. Quoniam igitur C eſt ad B in maiori proportione, quam ad F, erit B figura minor [c] ſibi inſcripto F, totum ſua parte. Eodemq; modo oſtendetur rationẽ B ad A, non poſſe eſſe maiorẽ ratione Z ad X. Et

[a] Per defin. 6. l. 12.

[b] Per 8. l. 5.

[c] Per 10. l. 5.

rum ducta ad ſuperficiem vtrimque per-
ingens.

Generatur ſphæra ſi ſemicirculus circa diametrum (A F) immotam conuertatur. Fig. 6.

6. Magnitudines figuræ alicui inſcriptæ, aut circumſcriptæ, ſiue figurâ minores vel maiores, in figuram deſinere dicuntur, cum ab ea tandem differre poſſunt quantitate minori quâcunque datâ, ſeu quantumuis paruâ.

Itaque ſi ea, quæ figuræ alicui inſcribuntur, ab eâ tandem deficiant defectu minori quocunq; dato inſcripta dicentur in figuram deſinere: Et ſi ea quæ alicui figuræ circumſcribuntur, excedant eam tandem exceſſu minori quocunque dato, dicentur rurſum circumſcripta deſinere in figuram.

PROPOSITIO PRIMA.

Polygonorum ſimilium circulo inſcriptorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum (A F, I C.) Fig. 6. & 7.

Ducantur a A O, B F; I R, L C. Quia polygona ponuntur ſimilia, æquales erunt anguli O B A, R L I, & latera O B, B A proportionalia lateribus R L, L I. Ergo in triangulis O A B, R I L, b anguli O & R æquantur. Ergo etiam B F A & L C I, qui, iiſdem arcubus B A, L I, inſiſtunt, ſunt

a Per defini. 1. l. 6.

b Per 6. l. 6.

c æqua-

c Per 21.l.3. c æquales, Anguli vero F B A, C L I in ſemicirculis ſunt d recti, ac proinde æquales.
d Per 31.l.3.
e Per coroll. 9.p.32.l.1. Ergo reliqui B A F, L I C e æquantur. Quoniam igitur triangula F A B, C I L, ſibi mutuo æquiangula ſunt, erunt f ſimilia, eritque B A ad L I, vt A F ad I C. Iam quia per hyp. polygona ſunt ſimilia, erit proportio eorum duplicata i proportionis laterum B A, L I; hoc eſt vt iam oſtendi duplicata proportionis diametrorum A F, I C. Quod erat demonſtrandum.
f Per 4.l.6.
i Per 20.l.6

Corollarium.

Fig.6. & 7. POlygonorum ſimiliũ circulo inſcriptorum ambitus ſunt inter ſe, vt diametri.

Cum oſtenſum iam ſit A B eſſe ad L I, vt A F ad I C, etiam O B, erit ad R L, vt A F ad I C, & ſic de cæteris lateribus. Ergo per 12.5. omnia ſimul latera, ad ſimul omnia, hoc eſt ambitus ad ambitum ſunt vt A F ad I C.

Lemma.

Fig.8. POlygona circulo inſcripta in circulum deſinunt.

Inſcribe quadratum A C B D. Cum hoc dimidium ſit quadrati a circulo conſcripti, erit maius dimidio circuli. Quare ſi hoc auferatur è circulo, auferetur plus quã dimidium. Deinde ſingulis arcubus biſectis in
a Per ſchol. poſt.6.& 7. l.4.

in E,K,I,H, inſcribe octogonum: & in E tangat F G, cui B C, D A occurrant in G & F: erit C F parallelogrammũ, cuius cum dimidium ſit triangulum *b* C E A, erit hoc plus quam dimidium ſegmenti C E A. Eodem modo ſingula triangula A K D, D I B &c. ſingulorum ſegmentorum plus ſunt quã dimidia. Ergo omnia triangula omniũ ſegmentorum plus quam dimidia ſunt. Hæc ergo ſi ex illis, hoc eſt ex reſiduo circuli auferas, plus quam dimidium auferetur. Pari argumento ſi inſcribantur circulo polygona duplo ſemper plurium laterum oſtẽdam è reſiduo circuli ſemper auferri plus quam dimidium. Ergo reſiduum erit tandem *c* minus quocunq; dato, ac proinde polygona inſcripta tandem à circulo deficient quantitate minori, datâ quâcunque, hoc eſt in circulum *o* deſinent. Quod erat demonſtr.

b *Per 41. l. 1*

c *Patet ex lem. 2. Schol. poſt 11. l. 6.*

o *Per deſin.*

PROPOSITIO II.

Circulorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum. *Fig. 6. & 7.*

Polygonorum ſimilium circulo ſine ſine inſcriptorum proportio ſemper duplicata *a* eſt proportionis diametrorum. Atqui polygona circulo in infinitum inſcripta, in circulũ *b* deſinunt. Ergo per poriſma vniuerſale ſequens, etiam circulorum proportio,

a *Per 1. l. 12.*

b *Per lem.*

duplicata eſt proportionis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

Poriſma vniuerſale.

SI ea quæ duabus figuris (A, B) inſcribuntur, in ipſas deſinant, quam proportionem inter ſe ſemper habeant inſcripta, eandem habent & figuræ.

R
A B X.Z.
C F

Sit ratio X ad Z, ea quam inſcripta ſemper habent inter ſe. Si ergo negas rationem figurarũ A, B, eandem eſſe cum ratione X ad Z, quã ſemper habent ea, quæ figuris inſcribuntur, ſit ratio A ad B primo maior ratione X ad Z. Ergo alia quædam quantitas R minor quam figura A, erit ad figuram B, vt X ad Z. Quoniam inſcripta per hyp. deſinunt in figuras A & B, erunt aliqua figuris A & B inſcripta, quæ ab ipſis deficiant *a* minori quantitate, quam R deficiat à figura B. Sint ea, C & F. Ergo C erit maius quã R. Ergo C eſt ad B in *b* maiori, quam R ad B; hoc eſt (vt ponebatur) quam X ad Z, hoc eſt per hyp. quam idem C ad F. Quoniam igitur C eſt ad B in maiori proportione, quam ad F, erit B figura minor *c* ſibi inſcripto F, totum ſua parte. Eodem modo oſtendetur rationẽ B ad A, non poſſe eſſe maiorẽ ratione Z ad X. Er-

a Per deſin. 6. l. 10.

b Per 8. l. 5.

c Per 10. l. 5.

X. Ergo ratio A ad B æqualis eſt rationi, X ad Z. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSIT. III. & IV.

Svnt Prolixæ & difficiles tyronibus, nec alium habent vſum, quàm vt per eas demõſtretur quinta, quam nos ſine illis multò facilius demõſtrabimus.

Lemmata ad P. 5.

I.

Si duæ pyramides triangulares ſecentur planis (O S E, R X Z) ad baſes (A B C, I Q V) parallelis, quæ diuidant latera (C F, Q L,) proportionaliter (in E & Z,) erunt (O S E, R X Z) inter ſe vt baſes (A C B, I Q V.) Fig. 9.

Quoniam parallela plana O S E, A B C ſecãtur à planis B F C, A F B, A F C, erunt, ſectiones communes S E, B C, & O S, A B, & O E, A C [a] parallelæ. Ergo anguli O S E, A B C, & S O E, B A C, & O E S, A C B, bini & bini, æquales [b] ſunt. Quare ſectiones O S E, A B C [c] ſunt ſimiles. Eodem modo ſimiles eſſe oſtẽdam ſectiones R X Z, I V Q. Ergo ratio ſectionis A B C ad O S E eſt duplicata [d] rationis laterum B C ad S E; & ratio ſectionis I V Q ad R X Z duplicata eſt rationis V Q ad X Z. Atqui rationes B C ad S E, & V Q ad X Z ſunt eædem (eſt

a Per 16. l. 11
b Per 10. l. 11
c Per 4. l. 6
d Per 19. l. 6

e Per corol. 1 p. 4. l. 6. f Per idem corol. i Per 35. l. 5.

enim B C ad S E, vt *e* C F ad E F; hoc eſt per hyp. vt Q L ad Z L; hoc *f* eſt vt V Q ad X Z.) Ergo ratio A B C, ad O S E eadem eſt *i* cum ratione I V Q, ad R X Z. Quod erat propoſitum.

I I.

Fig. 10.

P*yramidi (Z C A F) triangulam habenti baſim, priſmata in infinitum inſcripta, deſinunt in ipſam pyramidem.*

Diuidatur latus pyramidis in aliquot æquales partes A B, B G, G F, & per B, G factis ſectionibus G D N & B E P baſi Z A C parallelis, inſcripta intelligantur pyramidi priſmata triãgularia B E P M A O, & G D N K B Q. His deinde extra pyramidem continuatis, intelligantur pyramidi eſſe circũſcripta priſmata C I B A, P X G B, N H F G. Exceſſus circumſcriptorum ſupra inſcripta ſunt ſolida I M, X K, H G, quæ ſimul ſumpta æquantur priſmati C I B A: nam H G eſt *b* æquale D B, ac proinde H G cum X K æquatur P X G B; hoc eſt *p* M E B A. Ergo tria H G, X K, I M, æquãtur toti C I B A. Atqui ſi A F in plures ſine fine partes æquales diuidatur, ac proinde priſmatum numerus in infinitum multiplicetur, A B fiet *a* quauis data minor. Ergo etiam *b* priſma C I B A fiet quouis dato minus. Ergo priſmatum circumſcriptorum (multo-

b Per 25. l. 11. p Per eand. a Collig. ex lem. 2. Schol. poſt. 11. l. 6. b Patet ex 25. l. 11.

nultoque magis pyramidis Z C A F, quæ
ars eſt priſmatum ſibi circumſcriptorum.)
xceſſus ſupra inſcripta priſmata, fiet quo-
s dato minor. Ergo inſcripta priſmata in
ramidem *c* tandem deſinunt. Quod erat
monſtrandum. c *Per defin. 6. l. 11.*

PROPOSITIO V.

Pyramides triangulares æquè altæ, eam inter ſe proportionem habent, uam baſes (A Q R, E S X.) *Fig. 11.*

Pyramidum altitudines æquales referant
tera A P, E Z, quibus in quot placuerit,
quales partes, ſed æquè multas, vtrimque,
iuiſis, factiſque per diuiſionum puncta ſe-
tionibus ad baſes parallelis, intelligantur
triqúe pyramidi inſcripta eſſe priſmata tri-
ona æquè multa & æquè alta. Iā verò quia
riſmata L A, I F ſunt æquè alta erit priſma
A ad priſma I E, vt *a* baſis L O B ad ba- a *Per coroll. 1. p. 34. l. 11.*
im I N K hoc eſt *b* vt baſis Q R A ad baſim b *Per lem. 1.*
X E. Eodem modo oſtendā ſingula priſ-
nata pyramidi Q P A R inſcripta, eſſe ad
ngula inſcripta pyramidi, S Z E X, vt ba-
s Q A R ad baſim S E X. Ergo etiam *c* ſi- c *Per 12. l. 5.*
nul omnia ſunt ad omnia, vt baſis ad ba-
m. Quare cum ea tandem deſinant *d* in ip- d *Per lem. 2.*
is pyramides, etiam ipſæ erunt *e* vt baſes. e *Per poriſ. vniuerſ. poſt p. 2. l. 12.*
Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 12. & 13.

PYramides quæcunq; æquè altæ, eam inter ſe rationem habent, quam baſes (A B, C F O.)

Reſoluantur baſes in triangula A, B, C, F, O; pyramides verò totæ in pyramides triangulares. Pyramis A X eſt ad pyramidem O Z, vt a A ad O; & pyramis b B X eſt ad pyramidem O Z, vt B ad O. Ergo pyramides ſimul A X, B X (hoc eſt tota A B X) ſunt ad pyramidem O Z, vt A, B c ſimul ad O. Eodem diſcurſu pyramis A B X eſt ad pyramidem F Z, vt d A B eſt ad F: Et A B X eſt ad C Z, vt e A B eſt ad C. Ergo A B X f eſt ad tres ſimul O Z, F Z, C Z, hoc eſt ad totam pyramidem O F C Z, vt A B ad O F C. Quod erat demonſtrandum.

a Per præc.
b Per eand.
c Per 24. l. 5.
d Per præc.
e Per 24. l. 5.
f Per eand.

PROPOSITIO VII.

OMnis pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis eandem baſim & altitudinem.

Fig. 14.

Sit primò pyramis trigona B G A C, in eadẽ baſi & altitudine cum priſmate B A C F E O, ducantur B F, A O, A F. Triangula

B F C,

B F C A, B F O ſunt *a* paria. Ergo pyramis B F C A pyramidi B O F A *b* æqualis eſt. Ob eandem cauſam pyramis O E A F par eſt pyramidi O B A F; hoc eſt pyramidi B O F A, ſunt enim eædem pyramides. Igitur etiam B F C A, & O E A F æquales ſunt. Omnes igitur tres B F C A, O E A F, O B A F, ſiue B O F A ſunt pares. Ergo tres ſimul vnius B F C A triplæ ſunt. Atqui tres illæ conſtituunt priſma B A C F E O. Illud ergo pyramidis B F C A, hoc eſt *c* B G A C, triplum eſt. Quod erat demonſtrandum. a Per 34. l. 1. b Per 5. l. 12. c Per 5. l. 12.

Sit deinde pyramis quæuis eandem habens baſim & altitudinem cum priſmate A E F H ductis lineis B C, B O, B E & N I, N G, N H, reſolue priſma in triangularia priſmata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet demonſtratio ex prima parte. Nam ſingulæ partes priſmatis triplæ erunt ſingularum partium pyramidis. Ac proinde totum priſma totius pyramidis triplum eſt. Quod erat demonſtrandum. Fig. 15.

PROPOSITIO VIII.

Similium pyramidum (O A C B, K H I N) proportio eſt triplicata eius, quã habẽt homologa latera (A B, H N.) Fig. 16.

Sint primo trigonæ perfectis parallelogrammis A M & H Q, ſuper his conſtitue parallelepipeda A G, H L, in altitudine pyramidum; quæ cum pyramides ſint ſimiles, etiã patet ſimilia *a* eſſe. Ducantur jam E F, R P, & per E F, C B, item per R P, I N ſecabuntur *b* parallelepipeda in duo priſmata æqualia; ſingula horũ *c* tripla ſunt pyramidum O A C B, & K H I N. Vtraque ergo ſimul; hoc eſt tota parallelepipeda, A G, H L, ſextupla ſunt pyramidum. Pyramides ergo parallelepipedis proportionales ſunt. Sed horum ratio *d* triplicata eſt rationis laterum A B, H N. Ergo & illarum. Quod erat demonſtrandum.

a Defin. 9. l. 11.
b Per 28. l. 11.
c Per præc.
d Per 33. l. 11.

Fig. 17. Quod ſi pyramides ſimiles fuerint poligonæ, reſoluantur in triangulares A R, B R, C R, & O K, E K, F K. Facile *e* oſtendes etiam A R ipſi O K, & B R ipſi E R, & C R ipſi F K eſſe ſimiles. Ergo per 1. partem ratio pyramidum A R, O K eſt triplicata rationis I M ad P Z: & ratio pyramidum B R & E K triplicata eſt rationis M X ad S Z; hoc eſt denuo per hyp. rationis I M ad P Z: & ratio pyramidum C R, F K eſt triplicata rationis X Q ad S T, hoc eſt rurſum I M ad P Z. Cum ergo ratio ſingularum ad ſingulas ſit triplicata rationis I M ad P Z, etiam ratio *e* omnium ad omnes (hoc eſt ratio totius pyramidis A B C R ad

e Ex 20. & 5. l. 6. & ex defin. 9. l. 11.
e Per 12. l. 5.

totam O E F K) triplicata erit rationis I M ad P Z. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IX.

Æquales pyramides, reciprocant baſes, & altitudines; & quæ reciprocant, ſunt æquales. Fig. 18. & 19.

1. Pars. Sint primò pyramides trigonæ B A C O, H K N L: perfectis parallelogrammis B E, H R, ſuper his ſint parallelepipeda B F, H P. Erunt, (vt oſtendimus in 8.) pyramidum ex hyp. æqualium ſextupla, ac proinde æqualia inter ſe. Sunt verò horum parallelepipedorum altitudines H K, B A, eædem, quæ pyramidum: baſes verò B E, H R duplæ *o* ſunt baſium pyramidaliũ B C O, H N L, ac proinde ijs proportionales. Cum igitur ob parallelepipedorum æqualitatem, ſit vt B E ad H R, ita *a* reciprocè H K ad B A, etiã erit vt baſis B C O ad baſim H N L, ita reciprocè altitudo H K ad altitudinem B A. Quod erat demonſtr.

o Per 34. l. 1

a Per 34. l. 11.

Quod ſi pyramides habeant baſes polygonas, retentis iiſdem altitudinibus reducantur ad trigonas eruntque hæ illis æquales per 6. Sed pyramides ſic reductæ per iam demonſtrata reciprocant baſes & altitudines. Ergo etiam pyramides datæ polygonæ

gonæ reciprocant baſes & altitudines; Quod erat demonſtrandum.

2. Pars. Quoniã iam ponitur eſſe B C O ad H N L, vt H K ad B A, erit quoq; B E ad H R, vt H K ad B A. Ergo parallelepipeda B F, H P b ſunt æqualia, ergo & ſextæ eorum partes, nempè pyramides B A C O, H K N L. Quod erat demonſtrandum.

b Per 34. l. 11.

Corollaria.

QVæ de pyramidibus demonſtrata ſunt p. 6. 8. 9. etiam conueniunt quibuſcunque priſmatis; cùm hæc tripla c ſint pyramidum eandem baſim & altitudinem habentium. Igitur

c Per 7. l. 12.

1. Priſmatum æquè altorum eadem eſt proportio, quæ baſium. Id enim oſtenſum eſt de pyramidibus p. 6.

2. Similium priſmatum proportio eſt triplicata proportionis homologorum laterum. Id enim oſtenſum eſt de pyram. p. 8.

3. Æqualia priſmata reciprocant baſes & altitudines; & quæ reciprocant ſunt æqualia. Id enim de pyramidibus oſtenditur p. 9.

Mirum eſt hæc ab Euclide prætermiſſa, cum præcipua ſint, quæ de ſolidis rectilineis tradi poſſunt.

Scholium.

Scholium.

EX hactenus demonſtratis elicietur dimenſio quorumcunq; priſmatum ac pyramidum.

Priſmatis ſoliditas producitur ex altitudine in baſim ductâ, pyramidis verò ex tertiâ altitudinis parte ductâ in baſim.

Vt ſi priſmatis altitudo ſit 5. pedum, baſis vero 25. pedum quadratorũ, multiplica 25. per 5. proveniunt 125. pedes cubici pro ſoliditate priſmatis.

Eſto enim priſma polygonũ A H. Eius baſi AE intelligatur æquale eſſe triangulũ B A C, ſuperq; eo priſma B E æquè altum ac A H. Erunt c B E, A H æqualia priſmata. Sed B E priſma d produci- tur ex altitudine ſua in baſim B AC, hoc eſt e AE. Ergo etiam priſma A H fit ex altitudine ſua, quæ altitudini priſmatis B E æqualis ponitur, in baſim A E. Fig. 15. & 14. c Per corol. 5 præced. d Per ſchol. p. 40. l. 11. e Per conſtr.

Hinc vero & ex 7. patet demonſtratio partis ſecundæ.

Lemma ad P. 10.

PYramides & priſmata, quæ conis & cylindris in infinitum inſcribuntur, in conos & cylindros deſinunt.

Demonſtratur vt lemma propoſitionis 2. adminiculo propoſitionis 6. & corollarij 1. poſt p. 9. ſi vt iſtic plana circulo inſcripta, ita hîc pyramides & priſmata, quæ ſuper planis illis tanquam baſibus conſiſtunt, à cono & cylindro auferantur.

PRO-

PROPOSITIO X.

Omnis conus tertia pars eſt cylindri eandem baſim & altitudinem habentis.

Fig. 20. Baſi C L intelligatur inſcribi polygonũ regulare quotcunque laterum, & ſuper illo tanquam baſi, cono quidem pyramis, cylindro autẽ priſma inſcribi. Erit pyramis *a* tertia pars priſmatis. Et ſi rurſum inſcribatur circulo polygonum laterum duplo pluriũ, ſuperque eo inſcribatur cono pyramis & cylindro priſma; iterum erit pyramis tertia pars priſmatis; Atque hoc ſemper eueniet. Quare cum pyramides in conum, *b* priſmata in cylindrum deſinant, etiam *c* conus tertia pars cylindri erit. Quod erat demonſtr.

a Per 7. l. 12.
b Per lem. prec.
c Per Periſ. vniu. poſt 2. l. 12.

PROPOSITIO XI.

Fig. 20. & 21. *Conorum æquè altorum (B A F, Q X R) proportio eadem eſt, quæ baſium (C L, S E.) Idem accidit cylindris æquè altis.*

Pyramides conis æquè altis inſcriptæ ſunt, *d* vt baſes. Atqui *e* pyramides tandem in conos deſinunt. Ergo etiã *f* coni ſunt vt baſes. Cum verò cylindri conorum eandem cum ipſis baſim & altitudinem habentium

d Per 6. l. 12
e Per lem. ante 10. l. 12
f Per periſ. vniu.

ſint

at tripli, etiam ipſi erunt, vt baſes. Quod rat demonſtrandum.

Corollarium.

EOdem modo demonſtrabitur etiam priſmata & cylindros æquè alta eſſe inter ſe vt baſes; imò quælibet corpora cylindriformia æquè alta hoc eſt quæ producuntur ex quibuſcunque planis in eandem altitudinem ductis, eſſe inter ſe vt baſes. Eodẽ modo de pyramidibus & cono æquè altis, conicis quibuſcunque ratiocinare.

PROPOSITIO XII.

COnorum ſimilium (BAF et QZR) proportio eſt triplicata proportionis diametrorũ (B F & QR) quæ ſunt in baſibus: Idẽ cylindris ſimilibus accidit. Fig. 20. & 21.

Similium conorum baſibus inſcribe polygona ordinata, quæ proinde ſimilia erũt. Pyramides ſuper his polygonis inſcriptæ conis, etiam ſimiles ſunt, quod facile oſtenditur. Ergo earum proportio eſt triplicata proportionis laterum B L, Q E; hoc eſt proportionis diametrorum B F, Q R. Quare cum pyramides c in conos deſinant, etiam conorum proportio d eſt triplicata proportionis diametrorum B F, QR. Quod erat demonſtrandum.

a Per 8. l. 12. b Eſt demonſt. in 2. l. 12. c Per lem. ante 10. l. 12 d Per periſ. vnin.

De cylindris patet theorema cum ſint tripli conorum.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 22.

SI cylindrus (B I) ſecetur plano (R L) baſibus (B Q, C I) parallelo; erit pars (B L) ad partẽ (R I) vt axis ſegmentum (A O) ad ſegmentum axis (O F.)

Demonſtratur vt prima ſexti.

Theorema eodem modo verum eſt de ſuperficie.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 23. & 24.

CYlindri (AR et C I) baſibus (M Q, G H) æqualibus, sũt inter ſe vt altitudines (L Z, S F.) Idẽ conis accidit.

Abſcinde ab altiori cylindro A R cylindrum A O, altitudinis L E eiuſdẽ cum S F. Igitur cylindri A O, C I *a* æquales ſunt. Cum igitur cylindrus A O ſit ad cylindrum A R, vt *b* L E ad L Z, etiam C I erit ad A R, vt L E ad L Z, hoc eſt (quia L E & S F *c* æquantur) vt S F ad L Z. Quod erat demonſtrandum.

a Per 11. l. 12

b Per præc.

c Per conſtr.

Corollarium.

THeorema etiam verum eſt de priſmatis, itemque de pyramidibus, & demonſtratio planè ſimilis. Sed de priſmatis ex co-

rol. 1.

col. 1. p. 9. l. 12. & 25. l. 11. eiuſque coroll. De pyramidibus ex hoc, & ex. 7. l. 12.

PROPOSITIO XV.

Æqvales cylindri (A R, D F) reciprocant, baſes & altitudines; & ſi reciprocant, æquales ſunt. Idem conis accidit. Fig. 2. & 4. 25.

Demonſtratur vt P. 34. l. 11. ſed pro 32. & 25. iſthic citatis, hic adhibebitur prop. 11. & 13. lib. 12.

Scholium.

Cvm nihil attulerit Euclides de ratione compoſita in corporibus, eam breuiter hoc loco demonſtrabimus.

1. Cylindrus ad cylindrum, & priſma ad priſma, rationem habent compoſitam ex rationibus baſium & altitudinum.

Sumto cylindri F D, & A R. Ab altiori A R Fig. 25. & 24. *(nam in æquè altis res per ſe patet) abſcinde A O æquè altum ac F D. Sit etiã ut baſis V T ad baſim M Q, ita F N ad X, & ut altitudo N D, ſeu B O, ad altitudinẽ B R, ita X ad Z. Oportet igitur oſtẽdere cylindrum F D eſſe ad cylindrũ A R, ut F N eſt ad Z. Cylindrus F D eſt ad cylindrũ A O, ut* a *baſis V T ad baſim M Q hoc eſt* b *ut F N ad X. cylindrus autẽ A O eſt ad cylindrũ A R, ut* c *B O ad B R; hoc eſt ut* d *X ad Z. Igitur ex* e *æquo cylindrus F D eſt ad cylindrum A R, ut F N ad Z.*

a Per 11. l. 12. b Per conſtr. c Per 13. l. 12. d Per conſtr. e Per 22. l. 5.

De priſmatis res eodem modo demonſtrabitur.

ſed

ſed ex corollario 1.p.9.& coroll.p.14.

2. Etiam conus ad conum & pyramis ad pyramidem rationem habent compoſitam ex rationibus baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem.

e Per 10. & 7.l.12. *Sunt enim e cylindrorum ac priſmatum partes tertiæ.*

PROPOSITIO XVI. XVII.

HÆ propoſitiones omnium prolixiſſimæ non aliũ vſum habent, quam vt demonſtretur P.18. quam nos aliâ faciliori viâ demonſtrabimus.

Lemma ad P. 18.

CYlindri hemiſpherio inſcripti in hemiſphærium deſinunt.

Fig.26. Sit P Z Y maximus hemiſphærij ſemicirculus, ſitque radius A Z perpendicularis diametro P Y. Seca A Z in aliquot æquales partes A M, M N, N Z; ductiſq; per diuiſionũ puncta M, N, perpendicularibus, &c. Inſcribantur ſemicirculo rectangula O B R K, E D H S, quibus deinde extra circulum continuatis, ſemicirculo circumſcripta intelligãtur rectangula F T Y P, L V B O, Q X D E. Eruntq; omnia æquèalta, exceſſus autẽ circumſcriptorum ſuprà inſcripta, ſunt plana F K, L S, X E, V H, T R, quæ ſimul ſumpta cõficiunt rectangulũ F T Y P: Nam quia X E æquatur D S, erunt L S,

V H,

V H, X E ſimul, æqualia rectangulo L B, hoc eſt O R. Quare ſi adijcias vtrimq; plana F K, T R, erunt ſimul omnia F K, L S, X E, V H, T R, æqualia rectangulo F T Y P. Si iam intelligatur ſemicirculus cum rectãgulis circa radiũ immotum A Z, circumagi, inſcripta rectangula E H, O R producent cylindros hemiſphærio inſcriptos, & rectãgula circumſcripta producent cylindros hemiſphærio circumſcriptos, ſibi mutuo inſiſtentes; & ſicut rectangulorum circumſcriptorum exceſſus, ſupra inſcripta rectangula erat rectangulorum F Y, ita etiã cylindrorum circumſcriptorũ exceſſus ſupra inſcriptos erit cylindrus à rectãgulo F Y genitus. Atqui huius cylindri altitudo fiet quãuis datã minor, adeoq; etiam ipſe quouis dato b euadet minor, ſi radio in plures ſine fine partes diuiſo rectangulorum, indeq; & cylindrorum numerus ſine fine multiplicetur. Ergo cylindrorum circumſcriptorum, multoque magis ipſius hemiſphærij, quod cylindrorum circumſcriptorum pars eſt, exceſſus ſupra inſcriptos cylindros fiet tandem quouis dato minor. Ergo cylindri hemiſphærio in infinitum inſcripti tandem deſinunt c in hemiſphærium. Quod erat demonſtrandum.

b Patet ex 13. l. 12.

c Per defini. 8. l. 12.

Corollarium.

EOdem modo demonſtrabitur cylindros, cono, conoidi, ſphæroidi, &c. inſcriptos, in ipſa deſinere.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 27. *Sphærarum proportio eſt triplicata proportionis diametrorũ (BK, RZ.)*

Radijs AB, YR in quot placuerit æquales partes, ſed æquè multas, diuiſis, ductiſque per diuiſionum puncta perpendicularibus &c. Intelligantur maximis ſphærarum ſemicirculis, inſcripta eſſe rectangula æquè multa, quę circa radios immotos AB, YR circumacta, inſcribant vtrique hemiſpherio cylindros æquè multos, ſibi inuicem inſiſtentes. Quia KC º eſt ad CF, vt CF ad CB. Erit ratio KC ad CB duplicata ª rationis KC ad CF, hoc eſt ratio bis FC ad CB. Similiter erit ratio ZE ad ER, duplicata rationis XE ad ER. Sed per conſtr. eſt KC ad CB, vt ZE ad ER. Ergo etiam ᵇ FC eſt ad BC, vt XE ad ER. Sed BC eſt ad CO per conſtr. vt RE ad ES. Igitur ex æquo ᶜ FC eſt ad CO, vt XE ad ES. Cylindri igitur ᵈ FL, XQ ſimiles ſunt, ac proinde eorum proportio eſt triplicata ᵉ proportionis diametrorum FI, XV,

o Per coroll. p.13.l.6.
a Per defin. 10 l.5.
b Per 35.l.5.
c Per 22.l.5.
d Per defin. 4.l.12.
e Per 12.l.12

G XV,

X V, ſeu ſemidiametrorum F C, X E, quæ ſunt in baſibus. Sed proportio F C ad X E eadem eſt cum proportione quæ eſt inter diametros ſphærarum B K, R Z, (nam vt iam oſtendi F C eſt ad X E, vt C O ad E S; hoc eſt vt B K ad R Z, ipſarum C O, E S per conſtr. æquè multiplices.) Ergo ratio cylindrorum F L, X Q eſt triplicata rationis diametrorum B K, R Z. Eodē modo demonſtrabimus ſingulos cylindros hemiſphærio vni inſcriptos, ad cylindros ſingulos inſcriptos alteri hemiſphærio rationem habere triplicatam rationis diametrorum B K, R Z. Ergo etiam ratio ſimul omnium, ad omnes ſimul *i* triplicata eſt rationis diametrorum B K, R Z. Quare cum aggregata cylindrorum tandem in hemiſphæria *k* deſinant, hemiſphæriorum quoque, ac proinde & ſphærarum ratio triplicata erit *n* rationis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

i *Per 12. l. 5.*

k *Per lem. præced.*

n *Per perſ. vniuerſ.*

Corollarium.

NOtâ igitur proportione diametrorum, etiā ſphærarum proportio innoteſcit, vt ſi minoris diameter ſit vnius pedis, maioris 10. continuetur ratio 1 ad 10 per quatuor terminos, 1. 10. 100. 1000. vt 1. ad 1000. quartū terminū, ita ſphæra minor ad maiorē.

Conorum, Cylindrorum, ſphæræ dimenſio tradigur libro ſeq. ex Archimede.

Scholium.

QVemadmodum ſimiles planæ figuræ per mediam proportionalem vnam, ita corpora ſimilia non niſi per medias duas, in proportione data augentur vel diminuuntur.

Data ſit ſphæra vel cubus, vel aliud corpus quodcunque, cuius radius ſiue latus ſit A. Data item ſit proportio quæcunque A ad B vt dupla. Oporteat exhibere corpus, & duplum dati & ſimile.

Inter terminos rationis datæ A & B; inueniantur duæ mediæ proportionales X, Z vt docuimus in ſcholio poſt 13. l. 6. ſphæra cuius radius eſt X, ſiue corpus dato ſimile, factum ſuper latere X, erit duplum dati.

Nam corpora ſimilia quorum radij, ſeu latera ſunt A & X, rationem inter ſe habent triplicatam [a] rationis A ad X, hoc eſt, eandem, [b] quam A habet ad B.

a Corol. p. 9. & pat. 12. ac 18. l. 12.
b Per defin. 10. l. 5.

Atque hoc eſt celebratiſſimum illud problema, quod Deliacum à Deliaco Apolline dictum eſt, quòd is lue ſæuiſſima Athenas populante conſultus reſpondiſſet, peſtem ceſſaturam, ſi eius ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Ita Valerius Maximus l. 8.

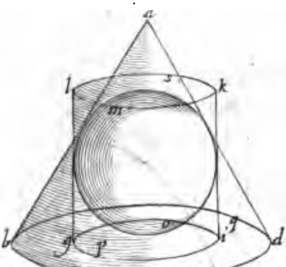
ANDREÆ TACQVET

E SOCIETATE IESV

SELECTA EX

ARCHIMEDE THEOREMATA.

Via faciliori ac breuiori demonſtrata, & nouis inuentis aucta.



VNA TRIBVS RATIO EST

ANTVERPIÆ,

Apud IACOBVM MEVRSIVM.

LECTORI.

Quamuis in Mathematicis diſciplinis complures ſummi & admirabiles viri extiterunt, prima tamen gloria communi quodam conſenſu Archimedi Syracuſano delata eſt. Sed illum plures laudant, quàm legant; admirantur plures, quàm intelligant. Cauſa, opinor, ſunt exemplariũ moles, & raritas, ſermonis ex Græco tranſlati obſcuritas nonnulla, demonſtrationes prolixæ & arduæ. Putaui igitur ex ſtudioſæ iuuentutis vſu futurũ, ſi elementis iam illuſtratis, hæc à me ſelecta ex Archimede theoremata, & via multò faciliori ac breuiori demonſtrata ſubnecterem. Selegi porro ea, quæ & admirationis plus, & utilitatis habent; itaq; in demonſtrando eam tenui, ut ſperem, eum, qui elementa perceperit, hæc ſummi Geometræ præclariſſima inuenta negotio haud magno aſſecuturum. Sub finem adiectis tredecim propoſitionibus, Archimedis de cylindro & ſphærâ doctrinam ampliorem facio, atque inter cætera demonſtro ſeſquialteram proportionem in tribus corporibus, ſphærâ, cylindro, & æquilatero cono, vtroque ſphæræ Circumſcripto, continuari. Varia inſuper ſparſim, inter quæ propoſitio 12. & corollaria prop. 14. præcipua ſunt, & ſcholia omnia adieci. Fruere iſtis, quiſquis Geometriæ cãdidatus es; & quantùm ex

Euclide profeceris, in Archimede experire. Cumq; in veritatum pulcherrimarum contemplatione defigi te, euehique ſurſum perſenſeris, mentem ab infimis hiſce rebus feliciter iam auulſam attolle etiam altiùs, atque dirige ad veritatem primam æternam, immenſam, quæ Deus eſt, cuius ineffabili viſione nos futuros aliquando æternùm beatos confido. Vale.

DEFINITIONES.

Seu vocum nonnullarum explicatio.

ESto circulus B E C G, cuius centrum A diameter B C, quam ad rectos angulos ſecet recta E G non per centrum videlicet in D. Ex centro autem educantur radij A E, A G. His poſitis. *Fig. 29. tab. 6. ex Archim.*

1. Sector ſphæræ eſt, qui à ſectore circulari A E C G ſeu A, E, B, G, circa diametrum B C in orbem acto, producitur.

2. Segmentum ſeu portio ſphæræ, eſt quę à circulari ſegmento E C G, ſeu E B G, circa eandem diametrum B C in orbem acto, deſcribitur.

3. Portionis ſphæricæ (E B G) vertex eſt diametri immobilis extremitas B: Baſis eſt circulus à rectâ E G deſcriptus. Axis eſt diametri pars B D inter verticem B, & D centrum baſeos intercepta.

4. Cum ſphæricæ portionis aut corporis ei inſcripti, aut coni ſuperficiem nomino, ſemper intelligo abſque baſi; & dum cylindri ſuperficiem dico intelligo ſimiliter abſque baſibus; niſi adjungatur (*tota*) tunc enim accipiuntur & baſes.

Rur-

Rurſum cum de cylindris vel conis ago, non alios intelligo quam rectos.

Axiomata.

Fig.1.& 16. 1. POlygoni circulo inſcripti ambitus minor eſt circuli peripheriâ.

Fig.2. 2. Polygoni circulo circumſcripti ambitus circuli peripheriâ maior eſt.

Fig.16. 3. Quod ſi polygonum circulo inſcriptum circa diametrum (A E) vnà cum circulo circumagatur, erit corporis à polygono geniti ſuperficies minor ſphæræ ſuperficie. Et ſi polygonum circulo circumſcriptum circa diametrum vnâ cum circulo circumagatur, erit corporis à polygono geniti ſuperficies maior ſuperficie ſphæræ.

Fig.17. 4. Similiter ambitus polygoni inſcripti ſegmento circulari (D A F) minor eſt peripheriâ ſegmenti (D A F.) Et ſi polygonum ſegmento inſcriptum vna cum ſegmento, circa ſegmenti axem (A O) circumagatur, erit corporis à polygono geniti ſuperficies minor ſuperficie portionis ſphericę (D A F.)

Fig.3.& 6. 5. Superſicies priſmatis cylindro inſcripti minor eſt cylindri ſuperficie; circumſcripti verò maior.

Fig.4.& 8. 6. Et ſuperficies pyramidis cono inſcriptæ minor eſt coni ſuperficie; circumſcriptæ autem maior.

P R O-

PROPOSITIO PRIMA.

Datæ ſint figuræ quæcunq; ſeu planæ ſeu ſolidæ, A, B. Sint autem magnitudines aliæ ſemper atque aliæ, quæ figuras datas A ac B ſemper minus at minus excedendo, in ipſas [a] *deſinant, & tamen ſemper inter ſe æquales ſint.* a Defin. 6. l. 12.

Dico etiam figuras, A, & B æquales eſſe.

Si non, alterutra E. F.
maior erit: ſit ergo A. A. X.
A maior quam B
exceſſu X. Per hypotheſim dantur magnitudines, E, F inter ſe æquales, quæ excedant figuras A, B exceſſu minori, quam X, quo A ponitur ſuperare B. Ergo F minor eſt quã A. Sed F per hypotheſim eſt æqualis E. Ergo etiam E minor eſt quam A; quod eſt abſurdum; cum per hyp. E excedat A. Eodem modo oſtendam B non poſſe eſſe maiorem quam A. Ergo cum neutra ſit maior alterâ, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

DAtæ ſint figuræ A & B; ſint autẽ magnitudines aliæ ſemper atque aliæ, quæ à figuris datis ſemper minùs ac minùs deficiendo, in ipſas b *deſinãt, & ſemper inter ſe æquales ſint:*

b Defin. 6. l. 12.

Dico etiam figuras datas A, B æquales fore.

A. B. Z.
O. P.

Si non, alterutra minor erit. Eſto igitur A minor quam B defectu Z. Per hypotheſim dari poſſunt magnitudines O, P, inter ſe æquales, quæ deficiant à figuris datis A & B defectu minori quam Z, quo ponitur A deficere à B. Ergo P maior eſt quàm A. Sed P per hypotheſim eſt æqualis O. Ergo etiam O maior eſt quàm A, quod repugnat hypotheſi, quâ ſtatuitur O minor quam A. Eodem modo oſtendam B non eſſe minorem quàm A. Quare cum neutra ſit minor alterâ, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

AMbitus polygonorum circulo circumſcriptorum, & inſcriptorum, de-

deſinunt in circuli peripheriã. Similiter & polygona ipſa in circulũ deſinunt.

Si nimirum arcubus ſine fine biſectis plura ſemper ac plura latera circulo circumſcribantur & inſcribantur. *Fig. 1. tab. 6. ex Archim.*

1. Pars. Intelligantur circulo inſcripta & circumſcripta polygona ordinata;ſiue vt traditur p. 12. l. 4. ſiue vt in hac figura, perinde erit. Manifeſtum eſt *a* F I eſſe ad E C (hoc eſt *b* totum ambitum circumſcriptum ad totum ambitum inſcriptum) vt I A eſt ad C A. Atqui I C exceſſus rectæ I A ſupra C A, fit tandem quãcunque datã minor, ſi plura ſemper ac plura in infinitum latera circumſcribi & inſcribi intelligamus. Ergo etiam exceſſus ambitus circumſcripti ſupra ambitum inſcriptum tandem fiet quouis dato minor. Ergo multò *c* magis exceſſus ambitus circumſcripti ſupra peripheriã fiet quocunque dato minor. Similiter, quia iam oſtendi defectum ambitus inſcripti ab ambitu circumſcripto fieri quouis dato minorem, multò *o* magis defectus inſcripti ambitus à peripheriã fiet quouis dato minor. Ambitus igitur tam inſcripti quã conſcripti in peripheriam *d* deſinunt. Quod erat primum. Hęc vlterius demonſtrare operę pretium non eſt, cum ſatis ſint manifeſta.

a *Per coroll. 1. p. 4. l. 6.*
b *Per 12. l. 5.*
c *Patet ex axio. 1.*
o *Patet ex axio. 1.*
d *Defin. 6. l. 12.*

2. Pars. Quia iam oſtenſum eſt exceſ-

ſum lateris F I ſupra latus E C fieri tandem quouis dato minorem(eſt enim F I ad EC, vt I A ad C A)etiam exceſſus quadrati F I, ſupra quadratum E C fiet quouis dato minor. Sed vt quadratum F I ad quadratum
e Per 22. l. 6 E C, ita e polygonum circumſcriptum ad polygonum inſcriptum. Ergo etiam exceſſus polygoni circumſcripti ſupra inſcriptum tandem fiet dato minor. Ergo multo magis exceſſus polygoni circumſcripti ſupra circulum tandem fiet dato minor; ac proinde & polygoni inſcripti defectus à circulo, dato minor aliquando erit. Igitur polygona circulo tam inſcripta quam cir-
i Defin. 6. l. 12. cumſcripta in circulum i deſinunt. Quod erat alterum.

PROPOSITIO IV.

Fig. 1. o Defin. 3. l. 4. *Polygonum o ordinatum circulo conſcriptum (F I N T R) æquetur triangulo, cuius baſis eſt ambitus polygoni, altitudo verò circuli radius.*

Et polygonum ordinatum circulo inſcriptum æquatur triangulo, cuius baſis eſt polygoni inſcripti ambitus, altitudo vero perpendicularis (A O) in latus vnum ex centro ducta.

1. Pars

1. Pars. Radius A B ad contactum ductus *a* eſt perpendicularis ad tangentem I F. Quare ſi ductis rectis A F, A I, A N &c. polygonum reſoluatur in triangula, erit radius A B communis omnium altitudo; adeoque triangula ipſa liquet eſſe æqualia. Ergo triangulum baſim habens parẽ ſummæ laterum F I, I N, N T &c altitudinem verò A B, æquabitur illis *b* omnibus, hoc eſt toti polygono circumſcripto. *a Per 18. l. 3.* *b Per 1. l. 6.*

2. Pars Simili ferè ratiocinio concludetur.

PROPOSITIO V.

Fig. 2.

Circulus eſt æqualis triangulo, cuius baſis eſt peripheria circuli, altitudo autem ſemidiameter.

Polygona ordinata circulo circumſcripta, & triangula baſes habentia ambitum polygoni, altitudinem verò radium circuli, ſemper ſunt *a* æqualia. Atqui polygona circulo in infinitum circumſcripta, in circulũ *b* deſinunt; ſimiliterque triangula (vt mox oſtendam) quæ pro baſi habent ambitum polygoni circumſcripti, pro altitudine verò radium A B, tandem deſinunt in triangulum pro baſi habens peripheriam, pro altitudine radium A B. Ergo *c* circulus, & triangulum pro baſi habens peripheriam, pro altitudine radium A B, æqualia ſunt. *a Per præc.* *b Per 3. huius.* *c Per 1. huius.*

Quod

Quod autem triangula ſub ambitu polygoni, & radio, deſinant in triangulum ſub peripheriâ & radio, ſic oſtendo. Triangula ſub ambitu circumſcripti polygoni & radio A B ſunt ad triangulum ſub peripheria & radio AB, vt [i] baſis ad baſim, nempè vt ambitus polygoni ad peripheriam; cùm altitudinem habeant communem. Sed ambitus polygoni in peripheriam [k] deſinit. Ergo & triangula deſinet in triangulum.

i Per 1.l.6.

k Per 3. hu-ius.

Corollaria.

1. EX hâc & 41. l. 1. patet rectangulum ſub radio & dimidiâ circumferentia, eſſe æquale circulo: ſub radio & totâ circumferentiâ eſſe duplum: ſub totâ diametro & totâ circumferentiâ eſſe quadruplum circuli.

Fig. 5. lib. 4. tabulâ 3.

2. Circulus eſt ad quadratum ſibi inſcriptum vt circumferentia dimidia (C D E) ad diametrum; ad quadratum verò circumſcriptum, vt quarta circumferentiæ pars ad diametrum.

d Per coroll. præced.

e Per 1.l.6.

Nam rectangulum ſub C D E & radio C A ſeu C F (hoc [d] eſt ipſe circulus) eſt ad rectangulum G F C E nimirum ſub F G & C F; (hoc eſt ad quadratum inſcriptum B C D E) vt [e] C D E dimidia circumferentia eſt ad F G ſeu C E diametrum; quòd erat primum, ac proinde circulus eſt ad duplum

duplum rectanguli G F C E (hoc eſt ad FH quadratum circumſcriptum) vt C D E ad duplam diametrum C E, ſiue vt quadrans C D ad diametrum C E.

PROPOSITIO VI.

Circuli circumferentia diametrum continet minùs quam ter & vnam ſeptimam (ſeu $\frac{10}{70}$) plus vero quam ter & $\frac{10}{71}$.

Ad huius theorematis demonſtrationem aſſumit Archimedes polygona ordinata, alterum circulo circumſcriptum, inſcriptum alterum, vtrumque 96 laterum. Deinde oſtendit 96 latera circulo circũſcripta continere diametrum minùs quam ter & $\frac{1}{7}$: ac proinde circumferentiam quæ ipſis minor eſt, etiã continere diametrum minùs quam ter & $\frac{1}{7}$. Latera vero 96 circumferentiæ inſcripta (ac proinde & circumferentiam quæ ipſis maior eſt) ampliùs cõtinere diametrum quam ter & $\frac{10}{71}$. Porro longior eſt huius rei demonſtratio quam vt hoc loco adferri debeat. Quod ſi ad polygona plurium adhuc laterum Geometricum ratiociniũ velimus extendere, limites iam ſtatutos arctare poterimus, magis magiſque ſine termino, atque ita propius in infinitum ad veram propor-

T tionem

tionem accedere. Præſtitum eſt hoc à Ludolpho Ceulen, Grimbergero, Metio, Snellio, aliiſque. Proportiones præcipuas hactenus inuentas hic ſubiicio.

Prima eſt Archimedis huiuſmodi

Diameter 7

Circumfer. 22 maior verâ.

Diameter 71

Circumf. 223 minor verâ

Rationes 22 ad 7, & 223 ad 71. Si ad commune conſequens reducantur (quod fit eodem modo, quo fractiones reuocantur ad eundē denominatorem) rationes orientur 1562 ad 497 & 1561 ad 497.

Poſitâ igitur diametro partium 497 erit circumferentia maior verâ 1562 & circumferentia minor verâ 1561.

Vtraque igitur à vera differt quantitate minori, quam ſit $\frac{1}{497}$ pars diametri. Quod ſi rationes 7 ad 22, & 71 ad 223 reducantur ad commune conſequens, prouenient rationes 1561 ad 4906, & 1562 ad 4906.

Poſitâ igitur circūferentiâ partium 4906. erit diameter minor verâ 1561. diameter maior verâ 1562.

Vtraque igitur à verâ diametro differt quantitate minori, quam ſit pars $\frac{1}{4906}$ circumferentiæ.

Proportio tradita à Metio eſt Archimedæa

medæa

medæâ multò accuratior. Iuxta hanc eſt

Diameter 113,

Circumf. 355.

Inter omnes paruis numeris conſtantes nulla veræ propinquior:ex hac enim poſitâ diametro 10,000,000,prouenit circumferentia 31,415,929,quę à verâ ſolùm penes notam primam 9 differt exceſſu paulò maiore, quam ſint duæ particulæ decimillioneſimæ diametri.

Sed vtrâque multò exactior eſt gemina illa Ludolphi à Ceulen:prioris termini cō-ſtant notis 21,poſterioris verò notis 36.

Diameter

100000000000000000000

circumf. maior verâ

314159265358979323847.

circumf. minor verâ

314159265358979323846

Differentia vtriuſque circumferentiæ eſt particula vna diametri denominata à numero, qui conſtat vnitate & 20 cifris, ac proinde tam hæc quam illa à verâ circumferentiâ differt minori quantitate quam ſit diametri particula dicta, videlicet centies millioneſies millioneſies millioneſima.

Diameter

1.0000000000000000000000000

.0000000000

Circumf. maior verâ.

314159265358979323846264338
327950289.
Circumf. minor verâ.
314159265358979323846264338
327950288.

Differentia vtriuſque circumferentiæ, inter quam vera exiſtit, eſt diametri particula vna, denominata à numero, qui conſtat vnitate & 35 cifris, quæ particula ad diametrũ minorem habet proportionem, quam arenula vna ad orbem terræ. Non enim conſtat orbis terræ tot arenulis, quot continentur particulæ tales in diametro.

Fruſtra igitur fit vlterius progredi. Progrediere nihilominus vltra in infinitum, ſi ratiocinium Geometricum, cuius methodum expeditam tradit Snellius, placuerit continuare.

Scholium.

Proportionis iam traditæ fructus eximij, ſunt hi qui ſequuntur.

Inuentio Diametri ex circumferentiâ.

Maiorem terminum vnius è proportionibus iam traditis ſtatue primo loco, minorem ſecundo, circumferentiam tertio, his tribus numeris quæratur per regulam auream quartus proportionalis. Is erit quæſita diameter.

Vt ſi detur circumferentia maximi circuli terræ

milliaria

milliaria continere Belgica vnius horæ 8640, & quæratur terræ diameter, ſic ſtabunt termini

355 —— 113 —— 8640 ——

multiplica iam ſecundum per tertium, & productum diuide per primum; proueniunt milliaria Belgica 2750 $\frac{14}{71}$ *pro diametro orbis terræ.*

Inuentio circumferentiæ ex Diametro.

TErminus minor vnius è proportionibus ſupra traditis ſtatuatur primo loco: maior ſecundo: Diameter nota tertio. His tribus numeris quæratur quartus proportionalis. Is dabit quæſitam circumferentiam.

Vt ſi detur orbis terræ diameter continere milliaria Belgica vnius horæ 2750 $\frac{14}{71}$, *& quæratur ambitus, termini ita ſtabunt.*

113 —— 355 —— 2750 $\frac{14}{71}$ ——

Tunc ſecundum multiplica per tertium & productum diuide per primum: proueniunt milliaria Belgica 8640 *pro ambitu orbis terræ.*

Quam modicè hæc circumferentia veram excedat, dictū eſt ſupra, exceſſu videlicet paulo maiore, quam ſint diametri terreſtris duæ particulæ decimillioneſimæ, hoc eſt 9 *circiter aut* 10 *pedibus Rhynlandicis, quorū* 18000 *conſtituunt milliare horariū. Quod ſi vtamur proportione Ludolphina etiam priori, cuius termini cōſtant* 21 *notis; inuenietur circumferentia inſenſibiliter à verâ differēs*

non ſolum diametro datâ milliariorum Belgicorũ 2750, qualis eſt terræ; verum etiã ſi licet diameter ponatur centum millionum eorundem milliariorum, qualis fortaſſe eſt diameter firmamenti: hâc enim poſitâ proueniet circumferentia minori quantitate à verâ differens, quàm vna centmillioneſimâ particula pedis Rhynlandici. Quod ſi ad inueſtigandam circumferentiã orbis terræ vtamur proportione Archimedis, interuallum circumferentiarũ verâ maioris ac minoris excedet 5 milliaria Belgica. Non eſt igitur adhibenda Archimedis proportio, niſi in quantitate paruâ: imò ſemper expediet Metianâ vti, quæ & modicis conſtat terminis, & pluſquam millies exactior eſt.

Circuli dimenſio.

SEmidiameter multiplicata per dimidiam circumferentiam producit aream circuli: quemadmodum patet ex corell. 1. p. 5. huius.

Vt ſi ſemidiametrum orbis terræ, quæ neglecta fractione continet milliaria Belgica 1375, multiplicemus per dimidium terræ ambitum, per milliaria nempè Belgica 4320; prouenient milliaria Belgica quadrata 5,940,000 pro circulo maximo terræ. Differentia inuentæ circularis areæ à verâ, habetur ſi differentia inuentæ circumferentiæ dimidiæ, à dimidiâ verâ, ducatur in ſemidiametrum datam; aut ſi differentia ſemidiametri inuentæ à verâ, ducatur in datam ſemicircumferentiam.

Di

Dimenſio cylindrorum & Conorum.

Eam hic appono, quòd à circuli dimenſione pendeat.

Cylindrus igitur & priſma quoduis producitur ex altitudine multiplicata per baſim; Conus & pyramis ex tertia altitudinis parte in baſim ducta, ſunt enim partes tertiæ cylindrorum ac priſmatum, eandem cum ipſis baſim & altitudinem habentium, per 10 & 7. l. 12.

Sit baſis Cylindri aut coni 50 ped. quadratorum, altitudo pedum 100. Duc 100 in 50; proueniunt 5000 pedes cubici pro ſoliditate cylindri. Duc tertiam partem altitudinis 100, nimirum $33\frac{1}{3}$ in 50 proueniunt $1666\frac{2}{3}$ pedes cubici pro ſoliditate coni.

PROPOSITIO VII.

Circulorum peripheriæ eam inter ſe proportionem habent, quam diametri. Fig. 64. l. 12. tab. 5.

Nam polygonorum ſimilium circulo ſine ſine inſcriptibilium ambitus ſunt inter ſe ſemper vt *a* diametri AF & IC. Sed hi *b* ambitus in peripherias deſinunt. Ergo *c* etiam peripheriæ ſunt inter ſe vt diametri. Quod erat demonſtrandum.

a Per coroll. 1. l. 12.
b Per 3. huius.

PROPOSITIO VIII.

Superficies priſmatis cylindro tã circumſcripti, quam inſcripti æquatur rectangulo, cuius altitudo eſt latus cylindri, baſis vero æqualis perimetro baſis priſmaticæ.

Fig.3. 1. Pars. Priſmatis conſcripti ſuperficies tangit cylindrum ſecundùm lineas E A, N F &c. quæ ſunt cylindri latera; hæc autẽ (quod ex hyp. cylindrus ſit rectus) ad planum baſeos recta ſunt, ac proinde etiam *e* recta lineas C G, G M &c. Sunt verò & æqualia inter ſe. Igitur vnum cylindri latus communis eſt omnium rectangulorum C O, O M, M H &c. altitudo. Conſcripti igitur priſmatis ſuperficies æquatur *f* rectangulo ſub ambitu baſis priſmaticæ & priſmatis ſeu cylindri latere contento.

e Per defin. 3. lib. 11.

f Patet ex 1. l. 6.

Eadem eſt ratio ſecundæ partis, nam latus cylindri, communis rurſum eſt altitudo rectangulorum B D I K, K I Q P &c. quæ conſtituunt ſuperficiem priſmatis inſcripti.

PROPOSITIO IX.

Fig.4. *Pyramidis ordinatæ, cono recto circumſcriptæ ſuperficies, æqualis eſt*

triangulo,

triangulo, cuius baſis eſt baſeos pyramidalis circumferentia (F H L D) altitudo autem latus coni (B G.)

Et pyramidis ordinatæ cono recto inſcriptæ ſuperficies æquatur triangulo, cuius baſis eſt baſeos pyramidalis circumferentia, altitudo vero perpendicularis (B O) à vertice in latus baſeos deducta.

1. Pars. Ducantur ad contactus G, K, M rectæ B G, B K, B M. Erunt hæ recti coni latera, ac proinde æquales. Et quia axis B A *a* rectus eſt baſis plano F K D, etiã planum *b* G B A plano F K D rectum erit. Atqui H G perpendicularis *c* eſt ad A G communem ſectionẽ planorum F K D & G B A. Ergo H G etiam *d* recta eſt plano G B A. ac proinde perpendicularis quoque eſt ad *e* ipſam B G. Ergo B G latus coni, eſt altitudo trianguli F B H. Eodem modo latus coni erit altitudo reliquorũ H B L, L B D &c. Igitur triangulum circumferentiâ F H L D, & latere coni comprehenſum, æquatur ſuperficiei pyramidis circumſcriptæ abſque baſi. Quod erat primum.

a Per hyp.
b Per 18. l. 11.
c Per 18. l. 3.
d Collig. ex def. 4. l. 11.
e Per defin. 3. l. 11.

2. Partis ſimilis ferè demonſtratio eſt.

PRO-

PROPOSITIO X.

Superficies priſmatis ordinati cylindro recto circumſcripti deſinit [a] *in cylindri ſuperficiem: & pyramidis cono recto circumſcriptæ ſuperficies in coni ſuperficiem deſinit.*

a Deſin. 6. l. 12.

Fig. 3. & 4.

1. Pars. Priſmatum ordinatorum cylindro ſine fine conſcriptorum & inſcriptorum ſuperficies habebunt tandem inter ſe differentiam data minorem, vti facilè patebit ex 8 & 3 huius. Multò igitur magis ſuperficies circumſcripti priſmatis à ſuperficie cylindri inter inſcriptam & circumſcriptam mediâ, differet differentiâ minori quâcunque datâ, hoc eſt, [b] deſinet in cylindricam ſuperficiem, minùs ſemper ac minùs excedendo.

b Deſin. 6. l. 12.

2. Pars. Eodem modo oſtenditur ex 9 & 3 huius.

In figuris tantum exhibentur cylindri & coni ſemiſſes, ne multitudo linearum confuſionem pareret. Cæterùm cogitandi ſunt cylindrus & conus integri, quos priſmata & pyramides circumſcriptæ ambiunt. Sic enim clariùs apparet planas ſuperficies circumſcriptas eſſe maiores ex 3. axiomate.

Lem-

Lemma ad ſequen.

SInt A B, C D, E F proportionales, ſitq; K B dimidia A B, & E G dupla E F; etiam K B, C D, E G proportionales erunt. Fig. 7.

Recta K B eſt ad A B, vt E F ad E G. Rectangulum ergo K B, E G æquatur per 16.l.6. rectangulo A B, E F. Sed hoc per 17 l.6. æquatur quadrato C D. Ergo & rectangulum K B, E G par eſt quadrato C D. Ergo per 17.l.6. K B, C D, E G, ſunt proportionales.

PROPOSITIO XI.

CIrculus, cuius radius (G H) eſt medius proportionalis inter recti cylindri latus (B C) & baſeos diametrũ (B D,) æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ. Fig. 5. & 6.

Intelligantur circulis A B N, G P H, circumſcripta eſſe ordinata polygona, adeoq; ſimilia N M, R S, & ſuper N M polygono erectum eſſe priſma, cylindro circumſcriptum. Quoniam B D, G H, B C ex hyp. ſunt proportionales, etiam A D (ſeu A N) G H & dupla B C *o* proportionales erunt. *o* Per lem. Iam triangulum ſub A N & ambitu polygoni M N contentum *a* æquatur polygono conſcripto N M: rectangulum verò ſub *a* Per 4. huius.

B C

B C ſeu E F & eodem ambitu N M (hoc eſt *b* triangulum ſub ambitu N M & dupla B C) æquale eſt *c* ſuperficiei priſmatis cylindro conſcripti. Atqui triangulum ſub ambitu N M & A N, eſt ad triangulum ſub ambitu N M & dupla B C *o* vt A N ad duplam B C. Ergo etiam polygonum N M eſt ad ſuperficiem priſmatis cylindro conſcripti vt A N ad duplam B C. Sed quia iam oſtendi A N, G H, duplam B C, eſſe proportionales, ratio A N ad duplam B C eſt duplicata *d* rationis A N ad G H. Ergo polygonum N M ad ſuperficiem priſmatis rationem habet duplicatam rationis A N ad G H. Sed etiam polygonum N M ad ſimile ſibi polygonum G R Q S, rationem habet duplicatam rationis A N ad G H, vt facilè colligitur ex 1. lib. 12. Ergo polygonum N M ad ſuperficiem priſmatis, & ad polygonum G R Q S eandem habet rationem; quæ proinde æqualia *e* ſunt. Eodem modo oſtendam, priſmaticas ſuperficies cylindro in infinitum circumſcriptibiles ſemper æquales eſſe polygonis, quæ circulo G P H in infinitum circumſcribi poſſunt. Quare cum & ſuperficies priſmaticæ *f* in cylindri ſuperficiem & polygona *i* in circulum G P H deſinant, etiã cylindri ſuperficies circulo G P H æqualis *k* erit. Quod erat demonſt.

b Patet ex 41. l. 1.
c Per 8. huius.
o Per 1. l. 6.
d Per defin. 10. l. 5.
e Per 9. l. 5.
f Per 10. huius.
i Per 3. huius.
k Per 1. huius.

Ex

Ex egregio hoc theoremate exhibetur circulus æqualis ſuperficiei cylindricæ.

Corollaria.

1. *SVperficies cylindri recti, æqualis eſt rectangulo ſub latere B C, & baſeos peripheria contento.* *Fig. 5. & 6.*

Dupla B C (vt oſtenſum ſupra) eſt ad G H, vt G H ad B A, ſeu A N; Hoc eſt, vt *n* peripheria P ad peripheriam B N. Ergo triangulum ſub primâ, nempè duplâ B C, & quartâ, nempè peripheriâ B N æquatur *p* triangulo ſub ſecundâ, G H, & tertiâ, peripheriâ ſcilicet P. Sed triangulum ſub G H & peripheriâ P, æquale *q* eſt circulo GPH; hoc eſt, *r* ſuperficiei cylindricæ. Ergo etiam triangulum ſub dupla B C & peripheriâ B N (hoc eſt *s* rectangulum ſub B C & peripheria B N) cylindricæ ſuperficiei æquale erit. Quod erat demonſt.

n *Per 7. huius.*
p *Patet ex 16. l. 6.*
q *Per 5. huius.*
r *Per 11. huius.*
s *Patet ex 41. l. 1.*

Ex hoc corollario manifeſtum eſt rectangulorum proprietates, ſuperficiebus cylindricis rectis eſſe communes. Eſto igitur corollarium.

2. Cylindricæ ſuperficies (B M, Q N) æquè altæ, ſunt inter ſe vt baſium diametri (B F, Q R.) *Fig. 20. & 21. l. 12. tab. 5.*

Nam rectangula ſub peripherijs C L,

S E,

S E, & rectis æqualibus F M, R N compre-
d Per coroll. 1. henſa, quibus cylindricæ ſuperficies d ſunt
æquales, ſunt inter ſe e vt baſes peripheriæ
e Per 1. l. 6. videlicet C L, S E; hoc eſt f vt diametri
f Per 7. huius. B F, Q R.

Fig. 23. & 24. l. 12. tab. 6. 3. Cylindricæ ſuperficies (C I, A R) quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe vt altitudines (T I, B R.)

Rectangula enim ſub æqualibus per hyp. peripherijs G H, M Q, & lateribus T I, B R
g Per coroll. 1. contenta, quibus ſuperficies g cylindricæ ſunt æquales, ſunt inter i ſe vt T I, B R.
i Per 1. l. 6.

Fig. 26. & 21. l. 12. tab. 5. 4. Similes cylindricæ ſuperficies (B M, R I) rationem habent duplicatam eius, quã habent baſium diametri (B F, Q R.)

Cum cylindri ponantur ſimiles, erit M F
o Defin. 4. l. 12. ad I Q, o vt B F ad Q R, hoc eſt k vt peripheria C L ad peripheriam S E. Quare et-
k Per 7. huius. iam rectangula ſub peripherijs C L, S E, & lateribus M F, I Q, contenta, ſimilia erunt,
l Per 20. l. 6 ac proinde rationem inter ſe habebunt l duplicatam eius, quam habet M F ad I Q, hoc eſt B F ad Q R. Ergo & cylindricæ ſuperficies &c.

Fig. eadem. 5. Cylindricæ ſuperficies (B M, R I) rationem inter ſe habent compoſitam ex rationibus laterum (F M, I Q) & diametrorum (B F, Q R) quæ ſunt in baſibus.

Fig. 24. & 25. l. 12. tab. 6. 6. Si æquales ſunt cylindricæ ſuperficies (A R, F D) erit vt diameter A B, ad diametrum

metrum F N, ita reciprocè altitudo F H ad altitudinem R B: & è conuerſo.

7. Denique ex eodem 1. corol. habetur cylindricæ ſuperficiei dimenſio, ſi nimirum altitudo ducatur in baſeos peripheriam, vt ſi altitudo ſit pedum 20, peripheria baſis pedũ 6; multiplica 20 per 6, prouenient 120 pedes quadrati pro cylindrica ſuperficie.

PROPOSITIO XII.

Cylindri recti ſuperficies eſt ad baſim (A B N) vt cylindri latus (C B) ad (B O) quartam partem diametri baſeos. *Fig. 6. & 5. tab. 6. Archim.*

Sit G H media proportionalis inter B C & B D diametrum baſis, ac proinde etiam media *a* proportionalis inter B A ſeu A N, & duplam B C. Circulus G P H radij G H æquatur curuæ ſuperficiei *b* cylindricæ C D. Sed circulus G P H ad cylindri baſim A B N, rationem habet duplicatam *c* rationis G H ad A N: hoc eſt *d* eandem quam dupla B C ad B A radium, hoc eſt eandem quam B C ad B O quartam diametri partem. Ergo etiam ſuperficies cylindrica eſt ad baſim A B N, vt B C ad B O quartam partem diametri B D. Quod erat demonſtrandum.

a *Per lem. ante p. 11. huius.*
b *Per 11. huius.*
c *Per 2. l. 12.*
d *Per hyp. & defin. 10. l. 5.*

Corol-

Corollarium.

SVperficies cylindri habẽtis latus diametro baſis æquale, baſeos quadrupla eſt. Si verò latus fuerit quarta pars diametri baſeos, ſuperficies cylindri baſi æqualis erit. Vtrumque ex propoſitione manifeſtum eſt.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 9. & 8.

CIrculus, cuius radius (O L) eſt medius proportionalis inter coni recti latus (B C) & baſis radium (A C,) æqualis eſt ſuperficiei conicæ.

Intelligantur circulis A C G, O P L, circumſcripta eſſe polygona ordinata E F, I N, & ſuper polygono E F erectam eſſe pyramidem cono circumſcriptam.

Quoniam per hyp. A C ſeu A G eſt ad O L, vt O L ad B C, erit ratio A G ad B C duplicata *a* rationis A G ad O L. Sed vt A G ad B C ita triangulum ſub A G & ambitu E F eſt ad triangulũ ſub B C & eodem ambitu E F. Ergo ratio trianguli ſub A G, & ambitu E F ad triangulum ſub B C & eodem ambitu eſt etiam duplicata rationis A G ad O L. Sed triangulum ſub A G & ambitu E F æquale eſt *b* polygono E F, & triangulum ſub B C & eodem ambitu E F æquale *c* eſt ſuperficiei pyramidis circumſcriptæ.

a *Defin.* 10. *l.* 5.

b *Per* 4. *huius.*

c *Per* 9. *huius.*

ſcriptæ. Ergo ratio polygoni E F ad ſuperficiem pyramidis etiam eſt duplicata rationis A G ad O L. Atqui etiam ratio polygoni E F ad polygonum ſibi per conſtr. ſimile I N eſt duplicata *d* rationis A G ad O L. Ergo polygonum E F, ad ſuperficiem pyramidis & ad polygonum I N eandem habet rationem, quæ proinde æqualia *e* erunt. Eodem modo oſtendam ſuperficies pyramidum, quæ cono in infinitum magis magiſque polygone circumſcribi poſſunt, ſemper æquales eſſe polygonis quæ circulo O P L poſſunt circumſcribi etiam in infinitum. Quare, cum & pyramidum *f* ſuperficies in coni ſuperficiem, & polygona in circulum *i* O P L tandem deſinant, etiam coni *k* ſuperficies & circulus O P L erunt æqualia. Quod erat Demonſt.

d Per 1.*l.*12.

e Per 9.*l.*5.

f Per 16. *huius.*

i Per 3. *huius.*

k Per 1. *huius.*

Ex hoc præclaro theoremate exhibetur circulus ſuperficiei conicæ æqualis.

Corollaria.

1. R*Ecti coni ſuperficies æqualis eſt triangulo, ſub coni latere* (*B C*) *& baſeos peripheria* (*C G*) *cōprehenſo.* Fig. 8. & 9.

Sit O L radius media proportionalis inter A C & B C, Quia peripheria C G eſt ad peripheriã P, vt *a* radius A G ad radium O L; hoc eſt per hyp. vt O L ad B C: erit triangulum ſub prima, nempè peripheriâ C G &

a Per 7. *huius.*

b *Patet ex 16.l.6.* ſub quarta B C *b* æquale triangulo ſub ſecunda, nempè peripheriâ P, & tertiâ O L; *o Per 5. huius.* hoc eſt *o* circulo O P L, hoc eſt *d* ſuperficiei conicæ B C D. Quod erat Demonſt.

d *Per hanc 13.* Ex hoc corollario liquet ſuperficies conicas triangulorum ſubire leges. Itaque

Fig. 20. & 21. l. 12. tab. 5. 2. Superficies conicæ B A F, Q X R æqualia latera B A, Q X, habentes, ſunt inter ſe, vt baſium diametri B F, Q R.

Fig. 23. & 24. l. 12. tab. 6. 3. Et (C F T, A Z B) quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe vt latera (C F, A Z.)

Fig. 20. & 21. l. 12. tab. 5. 4. Et quæ ſimiles ſunt (B A F, Q Z R) duplicatam habent rationem eius, quæ eſt inter baſium diametros.

Fig. ead. 5. Et quælibet, rationem inter ſe habent compoſitam ex rationibus laterum (B A, Q Z) & diametrorum (B F, Q R) quæ ſunt in baſibus.

6. Et quæ æquales ſunt reciprocant latera & baſium diametros; & quæ reciprocant, ſunt æquales.

Quæ omnia demonſtrantur ex coroll. 1. vt ſupra corollaria de cylindrica ſuperficie deduximus ex corollario iſthic primo.

Fig. 25. l. 12. tab. 6. 7. Metiemur denique conicam ſuperficiem, ſi latus F C per baſeos peripheriam dimidiam multiplicemus. Vt ſi latus ſit pedũ 5, peripheria baſeos pedũ 20, duc 5. per 10, proueniũt 50. pedes quadrati pro conica ſuperficie. Dem. patet ex eodem 1. coroll.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Coni recti ſuperficies eſt ad baſim, vt latus(BC)ad baſis radiũ(AC.) *Fig.8.& 9. Archim. tab.6.*

Inter latus B C & baſis radium A C, ſit media proportionalis O L. Ergo ratio B C ad A C eſt duplicata e rationis O L ad A C. Iam circulus radij O L f eſt æqualis ſuperficiei conicæ C B D. Sed huius ratio ad coni baſim A C G eſt duplicata g rationis O L ad A C, ac proinde eadem cum ratione B C ad A C. Ergo etiam ratio ſuperficiei conicæ C B D eſt ad baſim ACG, vt B C ad A C. Quod erat demonſt.

e *Defin.*10. *l*5.
f *Per* 13. *huius.*
g *Per* 2. *l*.12.

Corollaria.

1. *Superficies coni recti à triangulo æquilatero circa perpendicularem K A, circumacto geniti, baſeos Q T dupla eſt.* *Fig.*17.

Eſt enim K B latus æquale B D, adeoque duplum ſemiſſeos A B, quæ baſeos radius eſt.

2. *Superficies coni à rectangulo triangulo æquicruri E B D producta eſt ad baſim, vt in quadrato diameter ad latus.* *Fig.*24.

a Patet ex 26. l. 1.
b Per coroll. 11. p. 32. l. 1.
c Per 6. l. 1.

Ducta enim perpendiculari B A, a angulus rectus B biſecatur, adeoque A B D ſemirectus eſt, eſt autem & A D B b ſemirectus. Ergo D A, B A c æquales ſunt ac proinde B D eſt diameter quadrati A K latus verò A D. Eſt verò eadem A D ſemidiameter baſeos P T, cum perpendicularis A B, ſecet d bifariam E D. Ex quibus & hac 14. patet corollarium.

d Patet ex 26. l. 1.

Fig. 24.

3. Superficies cylindri recti (G K) eſt ad ſuperficiem coni recti (G B N,) vt cylindri latus ad dimidium latus coni.

e Per 14. huius.
i Per 22. huius.

Nam ſuperficies coni G B N eſt ad baſim M I, vt latus B N ad e ſemidiametrum baſis Q N; hoc eſt vt dimidium lateris BN ad quartam partem diametri G N. Eſt autem baſis M I ad ſuperficiem cylindri G K, vt i quarta pars diametri ad N K cylindri latus. Ex æquo igitur ſuperficies conica G B N eſt ad ſuperficiem cylindricã G K, vt dimidium latus coni ad cylindri latus N K. Quod erat demonſtr.

Lemma ad ſequen.

Fig. 19.

IN triangulo N P V ducta ſit Q D parallela ad N V.

Dico rectangulum ſub P N & N V, æquari rectangulo ſub P Q, Q D, vnà cum rectangulo ſub N Q & duabus ſimul ſumptis N V, Q D.

Duc

Duc lateri N P perpendicularem N A æqualem N V, completoque N O rectangulo, ducatur diameter P A. Tum ex Q parallela Q E ad N A ſecet P A in B. Per B ducatur C F parallela ad N P. Quoniam A N eſt par N V, patet etiam *a* Q B eſſe parem Q D. Igitur rectangulum O N eſt rectang. P N V, & F Q eſt P Q D. Reſtat vt probemus rectangula O B, E C, B N æquari rectangulo ſub N Q & duabus N A, Q B, hoc eſt ſub N Q & duabus N V, Q D. Id verò eſt manifeſtum: rectangulum enim ſub N Q & N A, Q B, æquatur *b* his tribus rectangulis ſub N Q & C A (hoc eſt ſpacio E C) ſub N Q, & N C (hoc eſt ſpacio B N) ſub N Q & Q B; hoc eſt rurſum ſpacio B N, ac proinde ſpacio O B, quod ipſi B N *c* æquale eſt. Liquet ergo propoſitum.

a Ex corol. 1. p. 4. l. 6. & ex 11. l. 5.

b *Per* 1. *l.* 2.

c *Per* 43. *l.* 1.

PROPOSITIO XV.

Fig. 11. & 12.

SI conus rectus ſectus ſit plano Q S R baſi N Z O parallelo; Dico circulum G H M, cuius radius G H eſt medius inter partem lateris N Q & circulorum Q S R, N Z O, radios Q D, N V ſimul ſumptos, æqualem eſſe ſuperficiei conicæ inter parallelos circulos Q S R, N Z O interceptæ.

Inter P N & N V media ſit G F. Item inter P Q & Q D ſit media G K, deſcribanturque circuli G F L, G K T. Erit hic *b* æqualis ſuperficiei conicæ Q P R, ille ſuperficiei *c* N P O. Rectangulum P N V æquatur *d* rectangulo P Q D, vna cum rectangulo ſub N Q & N V, Q D ſimul ſumptis. Sed quia *e* G F media eſt proportionalis inter P N, N V, rectang. P N V eſt æquale *f* quadrato G F, & quia G K eſt *i* media inter P Q, Q D, rectang. *l* P Q D æquatur quadrato G K: & quia G H media *k* eſt inter Q N, & Q D, N V ſimul ſumptas, rectangulum ſub Q N & Q D, N V ſimul ſumptis, æquale eſt *n* quadrato G H. Ergo quad. G F par quoque eſt quadratis G H, G K. Ergo cum circuli ſint inter ſe vt *o* quadrata radiorum, erit quoq; circulus G L F æqualis duobus circulis, G K T & G H M. Atqui circulus G L F eſt æqualis *p* ſuperficiei conicæ N P O. Ergo etiam ſuperficies conica N P O æquatur duobus circulis G K T & G H M. Atqui ſuperficiei N P O pars vna Q P R *r* æqualis eſt circulo G K T. Ergo reliqua, inter parallelos circulos Z Z, S S comprehenſa, æquatur circulo G H M. Quod erat demonſtrandum.

b *Per 13. huius.*
c *Per eand.*
d *Per lem.*
e *Per conſtr.*
f *Per 17. l. 6.*
i *Per conſtr.*
l *Per 17. l. 6.*
k *Per hyp.*
n *Per 17. l. 6*
o *Per 2. l. 12.*
p *Per 13. huius.*
r *Per eand.*

Lemma ad ſequen.

REctæ (B H, C G) quæ in circulo æquales arcus (B C, H G) intercipiunt, ſunt parallelæ. Fig. 13.

Ducatúr enim C H. Quoniam arcus B C, H G per hyp. ſunt æquales etiam [a] anguli B H C, G C H alterni æquales erũt. Ergo [b] B H & C G ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

a. Per 29. l. 3.
b Per 28. l. 1.

PROPOSITIO XVI.

INſcribatur circulo figura regularis, parilatera et æquilatera; Ducaturq́; E B ab extremitate diametri ad B, terminum lateris diametro proximi, angulos verò æqualiter diſtantes ab A, iungant rectæ B H, C G, D F. Fig. 14.

Dico rectangulum quod diametro A E, et ſubtenſâ E B continetur, æquari rectangulo, quod ſit ex latere vno figuræ inſcriptæ (A B, vel B C &c.) & ex omnibus iungentibus B H, C G, D F ſimul ſumptis.

Duc C H, D G: quoniã B H, C G, D F intercipiunt arcus [a] æquales B C, H G; C D, G F; erũt [b] parallelę. Pari argumẽto paralle-

a Per 26. l. 3
b Per lem. præc.

læ ſunt B A, C H, D G, E F. Omnia igitur
e Per 27. & triangula *e* BAK, K H L, L C M, M G N,
15. l. 1. N D O, O F E æquiangula ſunt. Ergo *d* vt
d Per 4. l. 6. B K ad K A, ſic H K ad K L; & vt H K ad
K L, ſic C M ad M L; & vt C M ad M L,
ſic G M ad M N; & vt G M ad M N, ſic
D O ad O N; & vt D O ad O N, ſic F O
e Per 12. l. 5. ad O E. Ergo *e* vt vna antecedentium B K
ad vnam conſequentium K A; ſic omnes
antecedentes B K, K H, C M, M G, D O,
O F; (hoc eſt omnes iungentes B H, C G,
D F) ſunt ad omnes conſequentes A K, K L
L M, M N, N O, O E, hoc eſt ad diametrum A E.
i Per 8. l. 6. i Sed vt B K ad *i* A K, ſic E B ad
B A. Ergo vt omnes ſimul B H, C G, D F
k Per 16. l. 6 ad A E, ſic E B eſt ad B A. Ergo *k* rectangulũ ſub omnibus iungentibus B H, C G,
D F, & ſub B A æquatur rectangulo ſub
A E & E B. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 14. S*Egmento circuli D A F, cuius baſis D F perpendicularis ſit diametri A O E, inſcribatur figura æquilatera & parilatera, ducaturq; vt in præcedenti recta E B.*

Dico rectangulum ſub E B & parte diametri A O, quæ ſegmenti axis eſt,

com-

comprehenſum, æquari rectangulo ſub latere vno figuræ inſcriptæ, et omnibus iungentibus BH, CG vnà cũ DO dimidio baſis DF ſimul ſumptis cõprehenſo.

Demonſtratio eadem quæ præcedentis.

Lemma 1. *ad ſequent.*

INſcriptâ ſit ſphæræ maximo circulo figura regularis, cuius latera quaternarius metiatur, circa axem A E conſiſtens: Quo manente, circulus cum figura circumagatur. Fig. 13.

Dico ſphæræ inſcriptum iri corpus conicis rectis ſuperficiebus contentum.

Quod B A, H A, item D E, F E deſcribant integras conorum rectorum ſuperficies manifeſtum o eſt. Deinde quia lineæ C B, G H, & G F, C D concurrunt productæ in eodem vtrimque puncto diametri AE ſimiliter pertractæ, quæ iungentes ſecat normaliter: etiam liquet has deſcribere partes ſuperficierum rectarum conicarum, interceptas inter parallelos circulos, quos in ſphærica ſuperficie deſcribunt vertices angulorum B, C, D. o *Vide defin. 2. l. 11.*

Lemma 2.

SEgmenti ſphæræ, cuius axis A O, ſectio maxima eſto D A F. Huic inſcripta ſit figura æquilatera demptâ baſi, quæ circa axem A O in orbem conuertatur. Fig. 14.

Dico

Dico ſegmento ſpharico inſcriptum iri co[...] conicis ſuperficiebus contentum.

Probatur vt lemma præced.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 13. *POnantur eadem quæ in primo le[...] mate. Et ducatur recta E B, [...] extremitate diametri ad termin[...] lateris diametro proximi.*

Dico omnibus ſuperficiebus coni[...] ſpheræ inſcriptis æqualem eſſe circu[...] cuius radius (I) poteſt [a] *rectangul[...] A E B, comprehenſum videlicet, ſ[...] diametro A E, & ſubtenſâ E B.*

a Potentia recta eſt quadratum eius.

Hoc eſt, [b] cuius radius (I) eſt medi[...] proportionalis inter A E & E B.

b Per 17. l. 6

Quoniam rectæ B H, C G, D F æqu[...] tur rectis B K, C M, D O bis ſumptis, [...] [c] rectangulũ ſub latere vno figuræ inſc[...] tæ maximo circulo (videlicet ſub A B, [...] B C, vel C D, vel D E) & ſub omnibu[...] mul iungẽtibus B H, C G, D F æquale[...] ctangulo ſub A B & B K, ſub B C & co[...] poſitâ ex B K & C M, ſub C D & com[...] ſitâ ex C M & D O, ſub D E & D O; [...] enim rectæ B K, C M, D O ſingulæ fue[...] bis acceptæ. Atqui rectangulum ſub [...]

c Per 1. l. 2.

& omnibus iungentibus B H, C G; D F ſimul ſumptis æquatur *d* rectangulo A E B, hoc eſt *e* quadrato I. Ergo quadratum I æquale eſt rectangulis ſub A B & B K, ſub B C & compoſitâ ex BK, C M, ſub CD & compoſitâ ex C M, D O, ſub D E & D O. Sint iam inter AB & BK media proportionalis P; inter B C & compoſitam ex B K, C M media Q: inter C D & compoſitam ex C M, D O, media R; inter D E & D O media S. Erunt igitur quadrata P, Q, R, S æqualia *f* rectangulis ſupradictis. Quare cũ quadratum I iam oſtenderim ijſdem æquari rectangulis, etiam quadratis P, Q, R, S æquale erit. Cum igitur circuli ſint inter ſe *g* vt quadrata radiorum, etiam circulus radio I deſcriptus omnibus ſimul circulis quorum radij, P, Q, R, S æqualis *i* erit. Atqui circuli radiorum, P, & S, æquantur *k* ſuperficiebus conicis quas produxerunt latera A B, E D, ſiquidem P eſt media proportionalis inter A B coni latus, & B K radium baſeos; S verò media eſt inter E D, & D O; & circulus radij Q eſt æqualis ſegmento *n* ſuperficiei conicæ quæ intercipitur inter duos parallelos circulos diametrorum C G, B H, quia Q media eſt inter B C, & compoſitam ex B K, C M; & ob eandem cauſam circulus radij R æquatur ſegmento ſuperficiei conicæ inter parallelos

d *Per 16. huius.*
e *Per hyp.*
f *Per 17. l. 6*
g *Per 2. l. 12.*
i *Patet ex 22 l. 6. & 24. l. 5.*
k *Per 13. huius.*
n *Per 15. huius.*

los

los circulos diametrorum C G, D F intercepta. Ergo circulus radio I deſcriptus, æquatur omnibus ſimul conicis ſuperficiebus ſphæræ inſcriptis. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 14. *POnantur eadem quæ in 2. lemmate, & ducatur recta E B ab extremitate diametri A B ad terminum lateris A B diametro proximi.*

Dico omnibus ſuperficiebus conicis ſegmento ſphærico D A F inſcriptis æqualem eſſe circulum, cuius radius eſt medius proportionalis inter E B, & ſegmenti axem A O.

Demonſtratio planè eadem, quæ præcedentis: ſed pro P. 16. citetur P. 17.

PROPOSITIO XX.

Fig. 15. *SVperficies conicæ ſphæræ inſcriptæ, in ſphæræ ſuperficiem deſinunt.*

Data ſit ſuperficies quantumuis parua X: manifeſtum eſt intra ſphæricam ſuperficiem A C E G dari aliam poſſe concentricam, quæ ab hac deficiat quantitate minori quam ſit X. Ambarum plano ſectarum per cen-

trum

trũ maximi circuli ſint A C E G, DPLM. Ducatur diameter A D E, & in D tangat N Q. Si arcus A E biſecetur in C, & reſiduum biſecetur rurſus & ſic deinceps, relinquetur *a* tandem arcus A B minor arcu A N. huic ſi ſubtendatur recta A B, manifeſtum eſt eam non pertingere ad peripheriam P D M L, eſſeque latus figuræ æquilateræ & parilateræ circulo C A G E inſcriptæ, cuius nullum latus pertingat ad peripheriam P D M E. Quare ſi circa diametrum A E in orbem agantur omnia, patet ſuperficiei ſphæricæ exteriori inſcribendas eſſe conicas ſuperficies, quæ includant ſuperficiem ſphæricam alteri concentricam, ac proinde illâ ſint *b* maiores. Quoniam igitur ſphærica ſuperficies D P L M, deficit à ſuperficie ſphericâ ACEG quantitate minori quam ſit data X; multò magis ſuperficies conicæ ab eâdem ſphæricâ A C E G, deficient quantitate minori quã ſit data X, ac proinde *c* in A C E G ſuperficiem deſinent. Quod erat demonſtrandum.

a *Patet ex lem.2. ſchol. poſt* 11.*l*.6.

b *Per axio.* 3.*huius.*

c *Deſin.*6. *l*.12.

PROPOSITIO XXI.

Fig 17.

Onicæ ſuperficies ſegmẽto ſphærico D A F inſcriptæ in ipſam ſegmenti ſphæricam ſuperficiem deſinunt.

Demonſtrabitur eodem ferè ratiocinio quo præcedens.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

Fig. 16. *DEmonſtratum eſt propoſ. 18. circulum cuius radius eſt medius proportionalis inter diametrũ AE, & rectam EB, quæ ab extremitate diametri ducitur ad terminũ lateris AB diametro proximi, æqualem eſſe omnibus ſuperficiebus conicis ſphæræ inſcriptis.*

o Vide defin. 6. l. 12. *Dico hunc circulum deſinere o tandem in circulum, cuius radius eſt AE ſphæræ diameter.*

Nam ſi plura ſemper ac plura in infinitum latera circulo maximo inſcribantur, (quæ deinde circa A E in orbem acta conicas producunt ſuperficies) patet latus A B fieri tandem quauis datâ rectâ minùs, ac proinde ſubtenſam E B, ad diametrum AE accedere ad interuallum etiam quouis dato minus; vnde fit vt differentia ipſarum A E, B E etiam fiat quâuis datâ minor. Ergo multo magis media proportionalis inter A E, B E, quæ ſemper maior eſt quam B E, differet ab A E tandem defectu minori quocunque dato. Ergo etiam circulus cuius ſemidiameter eſt media inter A E, & B E, à circulo, cuius radius eſt A E, tandem differet

ret defectu minori, quocunque dato : hoc eſt in *i* ipſum deſinet. Quod erat dem.

Hæc per ſe ſatis clara, non eſt neceſſe operoſius demonſtrare. i Deſin. 6. l. 12.

PROPOSITIO XXIII.

DEmonſtratum eſt propoſ. 19. *circulum, cuius radius eſt medius proportionalis inter E B & A O ſegmenti axem, æqualem eſſe omnibus ſuperficiebus conicis portioni ſphæricæ D A F inſcriptis.* Fig. 17.

Dico hunc circulum deſinere in circulum, cuius radius eſt recta A D, à ſegmenti vertice ducta ad peripheriam circuli D Q F N, qui baſis eſt ſegmenti.

Nam quia iam ex præced. demonſt. liquet E B deſinere tandem in A E, patebit quoque mediam proportionalem inter E B & A O, deſinere tandem in mediam proportionalem inter A E & A O; hoc *n* eſt in ipſam A D. Manifeſtum eſt igitur & circulum cuius radius eſt medius proportionalis inter E B & A O etiam deſinere in circulum radij A D. Quod erat demonſtrandum. n Per coroll. 2. p. 8. l. 6.

Lem-

Lemma ad ſequen.

SI diameter diametri dupla eſt, circulus Circuli, quadruplus erit.

Patet ex propoſ.2,l.12.& defin.10.lib.5.

PROPOSITIO XXIV.

Fig.16. *CViuſcunque ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli eiuſdem ſphæræ.*

HOc nobiliſſimum Archimedis theorema ex iam præmiſſis expeditè demonſtrabimus hunc in modum.

Circulo ſphæræ maximo circa diametrum A E intelligatur inſcripta eſſe figura ordinata, cuius latera quaternarius metiatur. Quæ circa A E in orbem ducta, producat conicas ſuperficies, ſuperficiei ſphæricæ inſcriptas, ducaturq; E B. Demonſtratum iam ſupra *a* eſt, omnes conicas ſuperficies ſphæræ inſcriptas æquales eſſe circulo, cuius radius poteſt rectangulum A E B, hoc eſt cuius radius eſt medius proportionalis inter A E, & E B. Atq; hoc ſemper eueniet inſcriptionibus in infinitum continuatis. Quare cum inſcriptæ conicæ ſuperficies *b* tandem deſinant in ſphæricam ſuperficiem, circulus verò cuius radius eſt medius inter A E, & E B, deſinat *c* in circulũ, cuius radius A E,

a 18. *huius.*

b *Per* 20. *huius.*

c *Per* 22. *huius.*

A E, ipſa quoque ſphærica ſuperficies, d æqualis erit circulo radij A E, hoc eſt e quadruplo maximi circuli A C E G. Quod erat demonſtrandum.

d Per 2. huius.
e Per lem. præced.

Viam, quâ in theoremate nobiliſſimo demonſtrando hactenus uſi ſumus; Archimedæâ multò breuiorem & clariorem eſſe ſciet, qui Archimedem legerit.

Corollarium.

EX hoc præclaro, atque admirabili theoremate, quo immortale nomen Archimedes apud omnes Geometras conſecutus eſt, exhibetur circulus æqualis ſuperficiei ſphæricæ, is nimirum cuius ſemidiameter eſt ſphæræ diameter, ſiue cuius diameter dupla eſt diametri ſphæræ.

Scholium.

EXpedita iam erit dimenſio ſuperficiei ſphæricæ, principis inter omnes curuas. Duplex eſt modus.

1. Menſuretur circulus ſphæræ maximus (vt traditur in ſcholio poſt P. 6. huius.) Et multiplicetur per 4. Vt ſi maximus orbis terræ circulus inuentus ſit continere quadrata milliaria vnius horæ ſiue Belgica 5, 940, 000, hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliaria Belgica, 23, 760, 000, quæ in ſuperficie orbis terræ continentur.

X 2. Dia-

2. Diameter ſphæræ multiplicata per circumferentiam maximi circuli exhibet ſphæræ ſuperficiem. Vt ſi terræ diametro dentur milliaria vnius horæ $2750\frac{14}{17}$ atque inde maximi circuli circũferentia eliciatur milliariorum 8640; hi duo numeri omiſſa fractione multiplicati per inuicẽ dabunt rurſum quadrata milliaria vnius horæ, 23,760,000 totã orbis terræ ſuperficiẽ conſtituẽtia.

Demonſtratio patet ex primo corol. p. 5. huius; rectangulum enim ſub diametro ſphæræ, & maximi circuli circumferentiâ, per dictum corol. eſt quadruplum maximi circuli.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 17. *CVIuſcunq; portionis ſphæricæ (DAF) ſuperficies æqualis eſt circulo, cuius radius eſt recta (AD) à vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli (DQFN) qui portionis eſt baſis.*

Portionis maximæ ſectioni inſcripta cogitetur circa axem AO figura æquilatera & parilatera baſi demptâ; quæ, circa AO in orbem acta, portioni inſcribet conicas ſuperficies. Ducatur quoque recta EB, vt o ſupra. Omnes conicæ ſuperficies ſegmento ſphærico iam inſcriptæ æquantur a circulo cuius radius eſt medius proportionalis inter EB, & ſegmenti axem AO. Atque hoc multiplicatis in infinitum inſcriptioni-

o Per 18. & 19. huius.
a Per 19. huius.

bus

bus ſemper continget. Quare cum & conicæ ſuperficies ſegmento inſcriptæ, deſinant *b* in ſphæricam ſegmenti ſuperficiem, & circulus cuius radius inter E B & A O medius eſt, deſinat *c* in circulum radij A D; etiam *d* ſphæricæ portionis ſuperficies D A F, circulo radij A D æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

b *Per* 21. *huius.*
c *Per* 23. *huius.*
d *Per* 2. *huius.*

Hoc alterum eſt ex Archimedis inuentis nobilioribus, quod perinde ac præcedens, viâ multò, quã ipſe, breuiori ac clariori iam demonſtrauimus.

PROPOSITIO XXVI.

Cylindri recti ſphæræ circumſcripti (H P S V) ſuperficies, æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ. Fig. 18.

Et ſi cylindrus ac ſphæra ſecentur planis ad axem (B G) rectis, erunt ſingula ſuperficiei cylindricæ ſegmenta ſegmentis ſingulis ſuperficiei ſphæricæ æqualia.

1. Pars. Quoniam cylindri latus H P æquale eſt *o* P S diametro baſis; erit cylindrica ſuperficies H S, quadrupla *a* baſeos, hoc eſt maximi circuli ſphæræ cylindro inſcriptæ; cuius cum etiam *b* quadrupla ſit ſphæræ ſuperficies, erit hæc æqualis cylindricæ. Quod erat demonſt.

o *Per hyp.*
a *Per coroll. p.* 12. *huius.*
b *Per* 24. *huius.*

2. Pars. Ducantur rectæ B O, G O. Quoniam angulus B O G *i* rectus eſt in ſemicirculo, ab eoque cadit O C perpendicularis ad B G, erit *c* B O media proportionalis inter G B, & B C, hoc eſt inter I T & H I. Ergo circulus radij B O *d* æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ H T. Sed idem circulus æqualis *e* eſt etiam ſegmento ſuperficiei ſphæricæ O B K. Æquales igitur ſunt ſuperficies, cylindrica H T, & ſphærica O B K.

i Per 31. l. 3.
c Per coroll. 2. p. 8. l. 6.
d Per 11. huius.
e Per præc.

Deinde quia eodem modo oſtenditur cylindrica H X æquari ſphæricæ Q B R, etiam reliqua cylindrica I X, reliquæ ſphæricæ Q O K R, inter duos parallelos circulos interceptæ, æqualis erit.

Ex his patet de ſegmentis omnibus.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 18.

SEgmenta ſuperficiei ſphæricæ parallelis circulis diuiſæ eam inter ſe proportionem habent, quam ſegmenta diametri (B C; C D, D A, A E, E F, F G) ad circulos parallelos rectæ.

Sequitur ex præcedenti. Sunt enim ſphæricæ ſuperficiei ſegmenta O B K, Q O K R, M Q R N, &c. *a* æqualia cylindricis, H T, I X, L N &c. Atque hæc eandem

a Per præc.

dem inter ſe rationem habent, b quam axeos ſegmenta B C, C D, D A &c. Ergo & illa. Quod erat demonſt. b Per 13. l.13.

Scholium.

Ex hac innoteſcit proportio zonarum & climatum inter ſe. Sunt enim ad inuicem vt ſegmenta axis, quæ nota ſiunt ex tabula ſinuum.

Ex eâdem habetur dimenſio ſegmentorum ſuperficiei ſphæricæ. Nā quia & totæ ſphæræ ſuperficies nota eſt ex ſcholio prop. 24. & ſegmentorum proportio, vtpote eadem quæ partium axis, etiam datur; liquet ſegmenta ſingula innoteſcere.

Cæterum & quatuor præcedentia theoremata, & reliqua omnia quæ ſequuntur, omnino ſingularia atq; admiranda ſunt, planeq; digna, ad quæ intelligenda Geometriæ ſtudioſi ardenti ſtudio incumbant.

Lemma ad ſequent.

Si ſphæram tangat planum (Q N in O,) recta (A O) ex centro ad contactum ducta eſt plano tangenti perpendicularis. Fig. 18.

Secentur planum tangens Q N & ſphæra, per tactū O duobus planis, quæ in ſphæra quidem producant circulos O G, O D, in plano autem Q N rectas C O, I O, quæ circulos contingent in O. Igitur per 18. l. 3. A O perpendicularis eſt ad vtramque

IO, CO, ac proinde per 4.l.11. recta plano QN. Quod erat demonſt.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig.20.22.
21.

OMnis ſphæra æqualis eſt cono (ZO) *cuius altitudo* (K O) *par eſt radio ſphæræ; baſis verò*(Z) *ſuperficiei ſphæræ æqualis.*

Intelligatur ſphæræ circumſcriptum eſſe corpus aliquod poliĕdrum, cuius ſolidi anguli nouis planis ſphæram tangentibus abſcindantur. Quo facto orietur aliud corpus poliĕdrum ſphæram continens, minùs priore, & pluribus conſtans angulis, & ſuperficiem habens ex pluribus ac minoribus planis tangẽtibus compoſitam. Si poliĕdri huius ſolidi anguli nouis planis tangentibus iterum abſcindantur, & tertij poliĕdri inde nati ſimiliter; atque ita in infinitum: fiet tandem vt & poliĕdrum excedat ſphæram ſolido minori quotunque dato, & ſuperficies eius ex planis tangentibus (quæ, vt dixi, ſine termino & minora, & plura erunt) cõpoſita, ſphæricam ſuperficiem, excedat quoque plano minori, dato quocunque. Quod vtrumque, licet demonſtrari poſſet, tamen quia per ſe ſatis clarum, poſtuletur ſtudio breuitatis. His ita conſtitutis, quæſitum ita concludemus.

Po-

Poliëdrum iam expoſitum componitur ex pyramidibus, quarum vertex communis eſt centrum ſphæræ, baſes verò ſunt plana tangentia, quæ poliëdri ſuperficiem conſtituunt. Et quia rectæ ex centro A ad ſingulorum planorum contactus ductæ, ad plana *a* ſingula perpendiculares ſunt, erunt omnium pyramidum, quibus conſtat poliëdrum, æqualis altitudo, ipſe nimirum A B radius ſphæræ. Si iam igitur planum, X, ponatur æquale ſuperficiei ipſius poliëdri, ſuperque eo erecta ſit pyramis ad altitudinem M N etiam æqualem ſphæræ radio A B, manifeſtum eſt *b* omnes pyramides ſupradictas, hoc eſt totum poliëdrum, æquari pyramidi X N. Ad eundem modum reliqua omnia poliëdra ſphæram includentia, quæ ex truncatione perpetuâ ſolidorum angulorum, alia atque alia naſcentur in infinitum, ſemper æqualia erunt pyramidibus (per X N repræſentatis) quarum altitudines (M N) ſunt radius ſphæræ, baſes vero (X) æquales ſuperficiebus poliëdrorum ſphæram ambientibus. Quare cum tandem, & poliëdra (vt dixi ſupra) in ſphæram, & pyramides X N (vt mox oſtendam) in conum Z O deſinant, etiam *c* ſphæra cono æqualis erit. Quod erat demonſt.

a *Per lem. præc.*

b *Per 6. l. 12.*

c *Per 1. huius.*

Quod autem pyramides X N *d* deſinant in conum ſic oſtendo. Poliëdrorum ſuperficies

d *Deſin. 6. l. 12.*

ficies deſinunt in ſphæræ ſuperficiem vt po ſtulatum ſupra. Atqui baſes X pyramidum X N, ſemper æquales ponuntur ſuperficie bus poliedrorum, & Z baſis coni Z O per hyp. æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ: ergo etiam baſes, X, deſinent in baſim Z; ac proinde cum pyramides X N ſint ad conum hyp. æquealtum, vt e baſis X ad baſim Z, etiam pyramides in conum deſinent.

e Per coroll. 11. l. 12.

Demonſtratio iam allata huius propoſitionis ſequentis, penitus diuerſa eſt ab eâ, quâ vſus eſt Archimedes; quæ quidem valdè ſubtilis & ingenioſa eſt, ſed prolixa & ardua; ad quam videlicet adhibentur duo manifeſta & propoſitiones vndecim præter alias non paucas, à quibus illæ dependent. Ipſum verò theorema ab Archimede proponitur hunc in modum: omnis ſphæra quadrupla eſt coni baſim habentis æqualem maximo circulo ſphæræ, altitudinem verò radium.

Scholium.

EX hoc prænobili theoremate figuræ inter corporeas nobiliſſimæ elicitur dimenſio. Nam ſi diametri ſexta pars, ſiue tertia ſemidiametri multiplicetur per ſphæræ ſuperficiem iam notam per ſcholium prop. 23. proueniet ſphæræ ſoliditas.

Inuenta ſit ſphæræ terreſtris ſuperficies continens quadrata vnius horæ milliaria 23,760,000, & *ſemidiameter eſto milliarium horariorum* 1375, *cuius tertia pars eſt* $458\frac{1}{3}$. *Multiplica* 458 *omiſſa fractio-*

fractione per 23,760,000 *prouenient* 10,882,080,000 *cubica vnius horæ milliaria pro ſoliditate orbis terræ.*

Cum enim ſphæra ſit æqualis a *cono, cuius altitudo eſt radius ſphæræ, baſis verò ſuperficies ſphæræ; coni autem ſoliditas* b *producatur ex parte tertia altitudinis, (hoc eſt radij ſphæræ) ducta in baſim, hoc eſt in ſphæræ ſuperficiem;) etiam ſphæræ ſoliditas obtinebitur ex tertia parte radij ducta in ſuperficiem.*

a *Per hanc* 28.

b *Per ſchol. p.*6. *huius.*

PROPOSITIO XXIX.

Omnis ſector ſphæræ æqualis eſt cono, cuius altitudo eſt radius ſphæræ, baſis vero ſectoris ſphærica ſuperficies.

Esto primùm ſector (A E C G) hemiſphærio minor. Intelligatur ſectori circumſcriptum eſſe poliëdrum corpus rectilineum. Si cætera ratiocinatio omnis ad eundem modum inſtituatur, vt in præcedenti, eodem modo concluderetur quæſitum. Id ſolum oportebit oſtendere, ex quo diſcurſus totus dependet, ſuperficiem poliëdri ex planis ſphæricam ſuperficiem E C G vndequaque tangentibus compoſitam, eſſe maiorem ſuperficie E C G. Quod ita fiet. Cogitetur ſuperficiei E C G apponi alia *Fig.*23.

æqua-

æqualis & ſimilis, planis tangentibus eodem prorſus modo cincta, quo prior. Erit iam tota c ſuperficies ex planis compoſita, maior totâ ſphæricâ. Ergo etiam dimidia ex planis compoſita dimidiâ ſphæricâ E C G maior erit.

c Per axiom. ſphæricum.

Eſto deinde ſector (A E B G) maior hemiſphærio. Vterque ſector ſimul ſumptus æqualis d eſt cono cuius altitudo eſt radius ſphæræ, baſis autem tota ſuperficies; hoc eſt e duobus conis, quorum altitudo eadem, baſes vero pares ſuperficiei ſphæricæ ſegmentis E C G, E B G. Atqui ſectorū vnus A E C G hemiſphærio minor, per 1 partem æquatur cono, cuius altitudo eſt radius, baſis vero ſuperficies E C G. Ergo alter A E B G æquatur cono reliquo, cuius altitudo eſt radius, baſis verò ſuperficies reliqua E B G. Quod erat demonſt.

d Per praec.
e Patet ex 31.l.12.

Corollarium.

CVm ſuperficies E C G ſit æqualis a circulo radij C G, & ſuperficies E B G æqualis circulo radij B G, erunt ſectores A E C G, & A E B G æquales conis, quorum altitudo eſt radius ſphæræ, baſes vero circuli radiorum C G, & B G.

a Per 25. huius.

Scho-

Scholium.

EX his habetur dimenſio & ſectorum, & ſegmentorum ſphæra, ſectorum quidem, ſi multiplicetur p *tertia pars radij per ſphæricam ſectorum ſuperficiem, iam notam ex ſcholio prop.27. ſiue per circulum radij* C G, *vel* B G; *ſegmentorum verò, ſi menſuretur conus* E A G, *& à ſectore, ſi minor eſt hemiſphærio, auferatur; ſi maior, eidem adijciatur.* Fig.23. p Patet ex ſchol.p.6. huius.

Segmentum (M Q R N) quod inter duos circulos ſiue parallelos ſiue non parallelos interijcitur menſurabis, ſi ſegmenta Q B R, M B N, iam nota auferantur ab inuicem. Fig.18.

PROPOSITIO XXX.

HEmiſphærium (E O B D) coni (E B D) eandem ſecum baſim & altitudinem habentis, duplum eſt. Fig.24.

Conus cuius baſis eſt ſuperficies hemiſphærica E O B D, altitudo autem radius A B, eſt ad conum E B D, *a* vt baſis ad baſim, hoc eſt vt ſuperficies hemiſphærica E O B D ad maximum circulum P T. Ergo cum ſuperficies hemiſphærica E O B D dupla *b* ſit maximi circuli, etiam conus pro baſi habens ſuperficiem E O B D, pro altitudine radium AB, duplus eſt coni E B D. Atqui hemiſphærium æquatur *c* cono habenti

a Per 11. l.12.

b Per 24. huius.

c Per 28. huius.

benti pro altitudine radium, pro baſi ſuperficiem hemiſphæricam E O B D. Ergo etiam hemiſpærium coni E B D duplum eſt. Quod erat demonſt.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 21. *SPhæra ſit diuiſa in duo ſegmenta ILBG, ISKG, plano IQGT, per centrum A non tranſeunte: diameter autem plano ſecanti recta ſit BOK.*

Vt altitudo OB ſegmenti ILBG eſt ad radiũ ſphæræ AB, ita QK altitudo ſegmenti alterius fiat ad aliã KN.

Pari modo vt OK altitudo ſegmenti ISKG eſt ad radium AK ſeu AB, ita altitudo OB ſegmenti alterius fiat ad aliam BD.

Dico 1. Coni ING & IDG quorum altitudines ſunt ON, OD, baſis vero communis IQGT, ſegmentis ſphæricis ſunt æquales.

2. Segmentorum eadem eſt proportio, quæ rectarum DO, NO.

3. Segmentum ISKG eſt ad maximum ſibi inſcriptum conum IKG, vt NO ad KO, & ſegmentum ILBG eſt ad

ad ſibi inſcriptum conum maximum I B G, vt D O ad B O.

Pars 1. Sphæra & coni ſecentur plano per diametrum B K. Producentur in ſphærà circulus maximus B L K G, in conis verò triangula B I G; I K G. Et quia B O K diameter *a* recta eſt circulo Q T, erit angulus I O B *b* rectus. Angulus quoque B I K *c* in ſemicirculo rectus eſt. Quoniam igitur in triangulo B I K ab angulo recto ducta eſt I O perpendicularis in baſim B K, erit B I ad I O, vt *d* B K ad K I. Ergo ratio duplicata B I ad I O æqualis eſt rationi duplicatæ B K ad K I; hoc eſt (quia B K, K I, K O, *f* ſunt tres proportionales) æqualis rationis B K ad K O.

a Per hyp.
b Per defin. 3. l. 11.
c Per 31. l. 3.
d Per 8. l. 6.
f Per coroll. 2. p. 8. l. 6.

Deinde quia eſt vt O K ad radium A B, ita *o* O B ad B D; erit quoque inuertendo D B ad B O, vt A B ad O K: & permut. D B ad B A, vt B O ad O K: & compon. D A ad B A, vt B K ad O K. Quoniam igitur iam oſtendi rationem B K ad O K duplicatá eſſe rationis B I ad I O, ac proinde æqualem *p* rationi circulorum radijs B I, I O deſcriptorum, erit quoque D A ad B A vt circulus radij B I ad circulum radij I O. Igitur conus ſub altitudine D A, & baſi circulo radij I O, hoc eſt circulo Q T, æqualis eſt *g* cono ſub altitudine B A, & baſi

o Per hyp.
p Per 2. l. 12.
g Per 15. l. 12.

baſi circulo radij B I; hoc eſt ſectori ſphærico A I B G. Quare ſi tam *i* ſectori AIBG, quam cono ſub D A & circulo Q T, addatur idem conus I A G, tota erunt æqualia; videlicet ſegmentum Sphæricum I L B G æquabitur duobus conis, quorum vnus eſt, qui fit ſub baſi Q T & altitudine D A, alter I A G, ſub eâdem baſi Q T, & altitudine O A. Sed hi duo coni *k* conficiunt conum I D G. Ergo ſegmentum I L B G cono I D G æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

i Per coroll. p. 29. huius.

k Patet ex 14. l. 12.

Eodem diſcurſu erit ſegmentum I S K G æquale cono I N G, eo ſolum mutato, vt conus I A G qui priùs addebatur, iam auferatur.

Pars 2. Patet ex primâ. Nam coni I D G & I N G ſunt inter ſe *n* vt D O, & N O. Ergo & ſegmenta I L B G, I S K G conis illis æqualia, ſunt inter ſe, vt rectæ D O, N O.

n Per 14. l. 12.

Pars 3. Patet ſimiliter ex primâ. Nam conus I D G eſt ad conum I B G, *q* vt D O ad B O. Ergo & ſegmentum I L B G, cono I D G æquale, eſt ad conum I B G, vt D O ad B O.

q Per eand.

Scho-

Scholium.

EX prima parte huius theorematis, habetur alia, eaq; facillima ſegmentorum ſphæricorum dimenſio; ſi nimirum coni I D G, *I* N G *menſurentur, quod fiet ſi* s *tertiæ partes rectarum* D O, N O *ducantur in circulum* Q T.

s *Vide ſchol. poſt 6. huius.*

PROPOSITIO XXXII.

CYlindrus rectus (G K) *ſphæræ, cui circumſcribitur, & ſoliditate & ſuperficie totâ ſeſquialter eſt.*

Fig. 24.

Communis ſphæræ ac cylindri axis eſto B Q, conus vero maximus hemiſphærio E O B D inſcriptus ſit E B D. Quia cylindrus E K, ſemiſſis totius G K, triplus a eſt coni E B D; hemiſphærium vero b eiuſdem coni duplum, patet cylindrum E K eſſe ad hemiſphærium, vt 3 ad 2. Ergo etiam totus cylindrus G K eſt ad totam ſphæram Q E B D, vt 3 ad 2. Quod erat primum.

a *Per* 10. *l.* 12.
b *Per* 30. *huius.*

Deinde quia cylindri latus K N eſt æquale baſis diametro G N, erit eius ſuperficies abſq; baſibus c quadrupla baſeos M I, ac proinde cũ baſibus, hoc eſt tota cylindri ſuperficies erit ſecupla baſeos M I, quæ par eſt maximo ſphæræ circulo. Atqui ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli.

c *Per coroll. p.* 12. *huius.*

Ergo

Ergo tota cylindri G K ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, vt 6 ad 4, ſiue vt 3 ad 2. Quòd erat alterum.

Igitur cylindrus ſphæræ ſibi inſcriptæ & ſoliditate & totâ ſuperficie ſeſquialter eſt. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

QVanti hoc theorema fecerit Archimedes argumento eſt, quod tumulo ſuo ſphæram cylindro inſcriptam apponi voluerit. Atque ideirco fortaſſe inter alia tã multa & præclara inuenta ſua hoc illi præ reliquis placuit, quod & corporum & ſuperficierum corpora ipſa continentium eadē eſſet atq; una rationalis proportio. Similem affectionum identitatē, annulos inter annulorumq; ſuperficies demonſtrauimus lib.4. Cylindricorū & annulariū prop.13.14.15. ſed & ipſâ in ſphærâ aliud mihi huius rei exemplum illuſtre ſeſe obtulit. Deprehendi ſiquidem, quemadmodum ſphæra ad cylindrum rectum, ſe ambientem (qui neceſſario æquilaterus erit) eſt tam ſoliditate quã ſuperficie, ut 2 ad 3; ita ſphæram ad æquilaterum conum ſe ambientem & ſoliditate ſimiliter & ſuperficie eã habere proportionem quam 4 ad 9. Ex quo deinde illud conſequitur, ſeſquialteram proportionem ab Archimede in cylindro & ſphæra repertã, in tribus ſolidis, ſphæra, cylindro, & cono æquilatero cõtinuari. Vtriuſq; demõſtrationē, pluraq; alia theoremata noſtra, quibus ſphæra natura mirabilis

amplius

amplius innoteſcet, tredecim ſequentibus propoſitionibus comprehenſa, ſubiungam.

PROPOSITIO XXXIII.

SVperficies ſphæræ dupla eſt ſuperficiei cylindri quadrati ſphæræ inſcripti. Fig. 26.

Quadratum maximo ſphæræ circulo inſcriptum, à quo in orbem ducto deſcribitur quadratus cylindrus, eſto A K L, ducaturque A L, diameter quadrato & ſphæræ communis. Quoniam quadratum A L par *a* eſt quadratis æqualibus A K, K L erit duplum vnius A K. Ergo etiam circulus diametri A L, duplus *b* eſt circuli, cuius diameter A K, circuli nempè C N. Atqui ſuperficies ſphæræ quadrupla *c* eſt circuli, cuius diameter A L, is enim eſt maximus ſphæræ circulus, cum A L ſit ſphæræ diameter. Ergo ſphæræ ſuperficies octupla eſt circuli C N. Sed quia L K, K A, *d* æquales ſunt, cylindrica ſuperficies ACL quadrupla *e* eſt circuli C N. Ergo cum ſphæræ ſuperficies eiuſdem circuli octupla ſit, cylindricæ ſuperficiei dupla erit. Quod erat demonſt.

a Per 47. l. 1

b Patet ex 2. l. 12.

c Per 24. huius.

d Per hyp.

e Per corol. p. 12. huius.

PROPOSITIO XXXIV.

SPhæræ ſuperficies ad totam cylindri quadrati ſibi inſcripti ſuperficiem eam proportionem habet, quam 4 ad 3. Fig. 26.

Ponantur eadem, quæ demonſt. præced. Quoniam cylindri latus L K & baſis diameter A K *f* æquales ſunt; erit ſuperficies cylindrica C L *g* quadrupla baſis C N, ac proinde tota cylindri ſuperficies ad vtramque baſim C N & S L eſt vt 6. ad 2. Atqui ſphæræ ſuperficies eſt ad vtramque ſimul baſim C N, S L vt 8. ad 2. cùm in præced. oſtenſa ſit eſſe ad vnam baſim, vt 8. ad 1. Ergo ſphæræ ſuperficies eſt ad cylindricam C L ſuperficiem vt 8. ad 6. ſiue vt 4. ad 3. Quod erat demonſt.

f Per hyp.
g Per coroll. p. 12. huius.

Corollarium.

Tota cylindri recti ſphæræ circumſcripti ſuperficies, eſt ad totam ſuperficiem cylindri æquilateri inſcripti, vt 2. ad 1. Nam circumſcripta eſt ad ſphæricam vt 12. ad 8. per 32. huius. Sphærica autem eſt ad inſcriptam, vt 8. ad 6. per hanc. Ergo ex æquo circumſcripta eſt ad inſcriptam, vt 12. ad 6. ſiue vt 2. ad 1.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 26. vel 25.

Cuiuſcunque portionis ſphæricæ ſuperficies (I L B G) ad ſuperficiem coni maximi inſcripti, eam rationem habet,

habet, quam coni latus (B G) ad baſis radium (G O.)

Quoniam portionis I L B G ſuperficies *a* æqualis eſt circulo radij B G, erit proportio eius ad circulum Q T, baſim nempè ſuam & coni, duplicata *b* rationis B G ad G O; hoc eſt *c* rationis ſuperficiei conicæ I B G ad baſim eandem Q T. Ergo liquet *o* ſuperficiem I L B G eſſe ad ſuperficiem conicam I B G, vt eadem conica I B G eſt ad baſim Q T. Quare cum conica I B G ſit ab baſim Q T, *d* vt B G ad G O, etiam portionis ſuperficies erit ad conicam I B G ſibi inſcriptam vt B G ad G O. Quod erat demonſt.

a *Per* 25. *huius.*
b *Per* 2. *l.* 12
c *Per* 14. *huius.*
o *Per defin.* 10. *l.* 5.
d *Per* 14. *huius.*

PROPOSITIO XXXVI.

Hemiſphærij ſuperficies (E O B D) ad coni maximi ſiue recti inſcripti ſuperficiem (E B D) eam rationem habet, quam in quadrato diameter ad latus: ad ſuperficiem vero coni ſimilis circumſcripti, vt latus in quadrato ad diametrum.

Fig. 24.

1. Partis demonſtratio ex præcedenti eſt manifeſta; eſt enim portionis cuiuſcunque, ac proinde & hemiſphærij ſuperficies E O B D ad conicam inſcriptã, vt B D ad

D A. Eſt autem B A D K quadratum, cuius diameter eſt B D, latus D A.

Fig 6. lib. 4. tab. 3. 2. Pars. Semiſſis quadrati circulo (cuius centrum A) circumſcripti, eſto E B C, quâ circa axem A B circumactâ gignatur conus hemiſphærio conſcriptus. Quoniam quadratum E C duplum *a* eſt quadrati E B, ſeu G I, etiam circulus diametri E C duplus *b* eſt circuli cuius diameter G I, hoc eſt circuli H G D I. Atqui *c* ſuperficies hemiſphærij cono E B C incluſi eiuſdem circuli dupla eſt. Ergo circulus diametri E C ſuperficiei hemiſphæricæ æqualis eſt. Quare cum ſuperficies conica E B C ſit ad *d* circulum diametri E C, baſim nempè ſuam, vt latus B E ad baſis radium E A, erit quoque ad ſuperficiem hemiſphæricam ſibi inſcriptam vt B E ad E A, hoc eſt vt diameter in quadrato E B C F, ad ſuum latus. Quod erat demonſt.

a *Patet ex 47. l. 1.*
b *Per 2. l. 12.*
c *Per 24. huius.*
d *Per 14. huius.*

PROPOSITIO XXXVII.

Fig. eadem cum Fig. 13. l. 5 tab. 3.

Sphæra ad quadratũ rhombum conicum ſibi circumſcriptũ, & ſoliditate & ſuperficie eam proportionem habet quam in quadrato latus ad diametrũ.

Maximo ſphæræ circulo H G D I circumſcriptum eſto quadratum E B C F, à quo circa axem B F in orbem acto, rhombus

bus conicus gignatur ſphæram ambiens.

Vt E B quadrati latus (inſpice Fig. 6. l. 4.) ad diametrum E C, ita fiat S ad R (inſpice Fig. 13. l. 5.) quæ proportio per 4. terminos S, R, Q, O, cõtinuetur. Erit igitur ratio S ad O triplicata *a* rationis S ad R, hoc eſt, E B ad E C; & ratio O ad R erit duplicata rationis O ad Q ſiue R ad S, hoc eſt E C ad E B, ac proinde *b* O eſt ad R, vt quadratum E C ad quadratum E B; vnde O eſt dupla ipſius R. His ita conſtitutis, intelligatur rhombo conico ſphæra circũſcribi E B C F. Erit igitur ſphæra H G D I ad ſphæram E B C F in *o* ratione triplicata diametri G I, (ſiue E B) ad diametrũ E C; hoc eſt (quod iam oſtendi) erit vt S ad O. Sphæra autem E B C F eſt ad rhombum conicum ſibi inſcriptum *c* vt 2 ad 1; hoc eſt (quod oſtendi ſupra) vt O ad R. Igitur ex æquo ſphæra H G D I eſt ad eumdem rhombum, qui ei eſt circumſcriptus vt S eſt ad R, hoc eſt vt in quadrato latus E B ad diametrum E C. Quod erat primum. Deinde ex ſecundâ parte præcedentis patet hemiſphæræ ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem coni E B C, ac proinde & totius ſphæræ ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem totius rhombi E B C F, vt latus in quadrato ad diametrũ. Ergo ſphæra tam ſoliditate quam ſuperficie eſt ad rhombum quadratum E B C F, vt in qua-

a Per defin. 10. l. 5.

b Per 20. l 6.

o Per 18, l. 12.

c. Per 30. huius.

drato latus ad diametrum. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 27. *Superficies portionis (B G K D) conũ æquilaterum (B K D) capientis dupla eſt ſuperficiei eiuſdem coni.*

Patet ſimiliter ex 35. Nam ſuperficies portionis B G K D eſt ad inſcriptam coni eam, vt a B K ad B A. Sed quia conus B K D æquilaterus ponitur, K B eſt æqualis B D, adeoque dupla B A. Ergo etiam ſuperficies B G K D dupla eſt inſcriptæ conicæ B K D. Quod erat demonſt.

a Per 35. huius.

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 27. *Sphæræ ſuperficies ad totã coni æquilateri ſibi inſcripti ſuperficiem eam proportionem habet, quam 16. ad 9.*

Eſto, Z, ſphæræ centrum & conus æquilaterus ſphæræ inſcriptus B K D, axis ſphæræ ac cono communis K Z A O. Per hunc ſi ſecetur ſphæra ac conus, producetur in ſphæra circulus maximus O B K D, in cono autem triangulum æquilaterum B K D, cuius vnum latus B A D erit diameter baſeos conicæ Q T. Et quia axis coni K A rectus eſt

eſt baſi Q T, erit angulus B A K *d* rectus. Igitur quadratum B A æquale eſt *e* rectangulo K A O. Iam quia latus æquilateri triã. guli abſcindit *f* quartam axis partem A O, erit rectangulum K A O, hoc eſt quadratum B A, triplum quadrati *i* A O. Quare cum quadratum radij Z O *k* quadruplum ſit quadrati A O, erit quadratum radij Z O ad quadratum radij B A, vt 4. ad 3. Ergo etiam *m* circulus O B K D eſt ad circulum Q T vt 4. ad 3. Ergo ſunt quatuor circuli O B K D, hoc eſt *n* tota ſphæræ D G ſuperficies, ad circulum Q T, vt 16. ad 3. Atqui *o* ſuperficies coni æquilateri B K D eſt ad circulum Q T, baſim nempè ſuam, vt 2. ad 1. ac proinde coni B K D tota ſuperficies, vnâ cum baſi ſcilicet, eſt ad baſim, nempè circulum Q T, vt 3 ad 1. ſiue vt 9. ad 3. Ergo cum oſtenderim ſphæræ ſuperficiem eſſe ad eundem circulum vt 16. ad 3. erit ſphæræ D G ſuperficies ad totam æquilateri coni ſuperficiem, vt 16. ad 9. Quod erat demonſt.

d *Per defin. 3. l. 11.*
e *Per corol. p 17. l. 6.*
f *Per corol. 5. p. 15. l. 4.*
i *Per 1. l. 6.*
k *Per 4 l. 2. vel 20. l 6.*
m *Per 2. l. 12.*
n *Per 24. huius.*
o *Per coroll. 1. p. 14. huius.*

Aliter.

Quoniam æquilateri trianguli latus B D, abſcindit *p* quartam axis partem A O, erit quoque ſphærica ſuperficies B O D *q* quarta pars, ac proinde ſuperficies B G K D, tres quartæ ſuperficiei totius

p *Per coroll. 5. p. 15 l. 4.*
q *Per 27. huius.*

ſphæræ. Quare ſi ſuperficies tota ſtatuatur eſſe 16, B G K D ſuperficies erit 12. Atqui ſuperficies B G K D r eſt dupla ſuperficiei conicæ B K D, ac proinde ad eam eſt vt 12 ad 6. Ergo tota ſphæræ ſuperficies eſt ad conicam B K D vt 16 ad 6. Deinde quia ſuperficies coni B K D, (vtpote æquilateri) dupla s eſt baſeos Q T, liquet ſuperficiem conicam B K D (nimirum abſque baſi) eſſe ad totam coni ſuperficiem, vt 2 ad 3, hoc eſt vt 6 ad 9. Igitur ex æquo tota ſphæræ ſuperficies eſt ad totam æquilateri coni inſcripti ſuperficiem, vt 16 ad 9. Quod erat demonſtr.

r Per præc.

s Per corol. 1. p. 14. huius.

PROPOSITIO XL.

Fig. 28.

Sphæræ ſuperficies ad æquilateri coni ſibi circumſcripti totam ſuperficiem, eam proportionẽ habet, quam 4 ad 9.

Circulo ſphæræ maximo B P M circumſcriptum ſit triangulum æquilaterũ D O F, à quo circa axem O A B in orbem ducto, productus ſit conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus. Æquilatero autem triangulo D O F circumſcriptus etiam ſit circulus, N D L O F, quem patet eſſe concentricum priori; & axis O A B perducatur in N. Quoniam B N eſt a quarta pars axis O N, patet O N eſſe duplam K B. Quare cum circu-

a Per corol. 5. p. 15. l. 4.

circulorum ratio ſit *b* duplicata rationis diametrorum, erit circulus BPM, ad circulum NDLOF vt 1 ad 4. Atqui oſtenſum iam eſt in demonſtratione prima præcedenti, circulum NDLOF eſſe ad circulum QT, baſim coni æquilateri ſphæræ FL inſcripti, vt 4 ad 3. Ex *c* æquo igitur circulus BPM eſt ad circulum QT vt 1 ad 3. Atqui tota coni DOF ſuperficies circuli QT *d* tripla eſt. Ergo tota coni ſuperficies circuli BPM noncupla eſt. Quare cum ſphæræ TP ſuperficies eiuſdem circuli BPM *e* quadrupla ſit, erit tota coni æquilateri DOF ſuperficies ad ſuperficiem ſphæræ, cui circumſcripta eſt, vt 9 ad 4. Quod erat demonſtr.

b *Per* 2. *l.* 12.

c *Per* 22. *l.* 5.

d *Per corol.* 1. *p.* 14. *huius.*

e *Per* 24. *huius.*

PROPOSITIO XLI.

Æquilateri coni ſphæræ circumſcripti tota ſuperficies quadrupla eſt ſuperficiei totius coni inſcripti eidem ſphæræ.

Fig. 28.

Æquilateri coni DOF circumſcripti tota ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem vt *a* 9 ad 4: & ſphæræ ſuperficies eſt ad coni inſcripti æquilateri SKT ſuperficiem vt *b* 16 ad 9. Ergo ex *c* æqualitate perturbatâ circumſcripti æquilateri coni tota ſuperficies

a *Per præc.*

b *Per* 39. *huius.*

c *Per* 23. *l.* 5.

cies

cies eſt ad totam ſuperficiem æquilateri inſcripti, vt 16. ad 4. ſiue vt 4. ad 1. Quod erat demonſt.

PROPOSITIO XLII.

Fig. 29.

SPhæra ad inſcriptum ſibi conum æquilaterum (B K C) eam rationem habet quam 32. ad 9.

Sphæra & conus B K C ſecentur plano per axem cõmunem K O, faciente in ſphærâ circulum maximum O F K I, in cono autem triangulum æquilaterum B K C. Ducto deinde plano per centrum A ad O K recto, abſcindatur hemiſphærium F G K I, cui inſcriptus intelligatur conus maximus F K I. Quoniam trianguli æquilateri latus B C abſcindit O P *d* quartam partem axis O K, erit P K ad A K vt 3. ad 2. hoc eſt vt 9. ad 6. Baſis verò Q T eſt ad circulum O F K I, hoc eſt ad baſim N D, vt 3. ad 4. hoc eſt vt 6. ad 8. vti patet ex demonſtratis prop. 39. Quare cum ratio coni B K C ad conum F K I componatur *e* ex ratione altitudinis P K ad altitudinem A K (hoc eſt ex ratione 9. ad 6.) & ex ratione baſis Q T ad baſim N D (hoc eſt ex ratione 6. ad 8.) erit conus B K C ad conum F K I vt 9. ad 8. Quare cum ſphæra C G quadrupla *f* ſit coni F K I, erit conus æquilaterus B K C ad

d Per corol. 3. p. 15 l. 4.

e Per ſchol. p. 15. l. 12.

f Per 30. huius.

ſphæram

ſphæram C G, vt 9. ad 32. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIII.

Conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus coni æquilateri eidem ſphæræ inſcripti octuplus eſt.

Coni æquilateri ſphæræ inſcripti, & circumſcripti ſint S K T & D O F & axis cõmunis eſto OKB. Secẽtur deinde plano per axem tã conus vterq; quam ſphæra, eruntq; ſectiones triangula duo æquilatera, & circulus B P M maximus. Circa triangulum quoque D O F intelligatur deſcriptus eſſe circulus N D O F, & axis O K B producatur in N. Quoniã verò æquilateri trianguli latus D F abſcindit axis O N quartam *a* partem N B, patet N O, eſſe duplam BK. Similiter quia æquilateri alterius trianguli latus S T abſcindit axeos B K *b* quartam partem B C, erit N O ad B O, vt B K ad C K: & permutando vt N O ad B K ſic B O ad C K. ſed N O dupla eſt B K. Ergo etiam B O dupla eſt C K. Igitur ob ſimilitudinem triangulorum D O F, S K T etiam *c* D F & S T diametri videlicet baſium conicarum, ſunt inter ſe in proportione dupla. Quare cum coni D O F, S K T, ſint ſimiles,

Fig.28.

a *Per corol. 5.p.15.l.4.*

b *Per idem corol.*

c *Per 4.l.6.*

d Per 12. l. 12. miles, ac proinde eorum proportio d triplicata ſit proportionis diametrorum D F & S T, quæ eſt 2 ad 1; erit conus D O F ad conum S K T, vt 8 ad 1. Quod erat dem.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 28. *Sphæra ad circumſcriptum ſibi conum æquilaterum (D O F) & ſoliditate & ſuperficie, eam proportionem habet, quam 4 ad 9.*

d Per 42. huius. Sphæra T P eſt ad inſcriptum d ſibi conum æquilaterum S K T, vt 32 ad 9. Inſcriptus autem S K T conus æquilaterus eſt ad conum æquilaterum circumſcriptum f Per præc. D O F vt f 1 ad 8, hoc eſt vt 9 ad 72. Igitur ex æquo ſphæra T P eſt ad conum æquilaterum circumſcriptum D O F, vt 32 ad 72; hoc eſt vt 4 ad 9. Propoſitione autem 40. demonſtrauimus etiam ſphæræ ſuperficiem eſſe ad totam æquilateri coni circumſcripti ſuperficiem vt 4 ad 9. Ergo ſphæra & ſoliditate & ſuperficie eſt ad æquilaterum conum ſibi circumſcriptum vt 4 ad 9. Quod erat demonſt.

Quod igitur in ſphæra & cylindro ſphæram ambiẽte miratus eſt Archimedes, idipſum in ſphæra & æquilatero cono ambiente ſphærã, iam demonſtrauimus, vt videlicet & ſoliditatũ inter ſe

eadem

idem proportio rationalis, quæ ſuperficierum, ſiſtat. Quemadmodum enim ille reperit ſphæram d cylindrum eſſe tam ſoliditate quàm ſuperficie, t 2 ad 3; ita nos docuimus ſphæram & ſoliditate r ſuperficie eſſe ad conum æquilaterum ſe am-ientem, vt 4 ad 9.

Hinc verò illam ipſam proportionem, nempè ſquialteram, quam exiſtere ſphæram inter ac ylindrum Archimedes tradidit, ab æquilatero co-no circumſcripto & ſoliditate etiam ac ſuperficie ontinuari nullo negotio iam demonſtrabimus, at-que ita huic pariter opuſculo finem imponemus.

PROPOSITIO XLV.

Conus æquilaterus ſphæræ circum-ſcriptus, et cylindrus rectus ſphæræ ſimiliter circū̃ſcriptus, & ipſa ſphæra, eandem proportionem continuant, ni-mirum ſeſquialteram, tam quoad ſoli-ditatē, quàm quoad ſuperficiem totam. *Vide Fig. quæ huic tractatui præfixa eſt.*

Nam per 32 huius cylindrus rectus GK ſphæram ambiens tam ſoliditate quam totâ ſuperficie eſt ad ſphæram vt 3 ad 2 ſiue ut 6 ad 4. Per præcedentèm verò circumſcrip-tus ſphæræ conus æquilaterus B A D, tam ſoliditate, quàm ſuperficie eſt ad ſphæram vt 9 ad 4. Ergo idem conus eſt ad cylin-drum tam ſoliditate quam ſuperficie, vt 9

ad

ad 6. Quare hæc tria corpora conus, cylindrus, ſphæra ſunt inter ſe vt hi numeri 9. 6.4. ac proinde continuant proportionem ſeſquialteram. Quod erat demonſtrandum.

FINIS.

Ad maiorem Dei Gloriam.



APPENDIX

Qua demonſtratur ex falſo poſſe directè deduci verum.

IN theſibus Mathematicis, quas Louanij ſeſqui abhinc anno Illuſtriſſ. D. Theodorus D'Imerſelle, Comes de Bouchoue & S. Imperij, magnâ ingenij commendatione & auditorum plauſu publicè propugnauit, inter cæteras propoſui aſſertionem huiuſmodi: *ex falſis poſſe verum directè elici nouis exemplis Geometricis confirmamus.* Hanc aſſertionem ſibi oppugnandam ſuſcepit vir Clariſſimus Daniel Lipſtorpius in appendice, quam operi ſuo pererudito, quod Specimina Philoſophiæ Carteſianæ inſcripſit, hac de cauſâ adiunxit. Id verò eâ modeſtiâ & humanitate præſtitit, vt facilè appareat; hoc illi vnum fuiſſe propoſitum, vt veritatem aſſequeretur. Ne autem videar doctiſſimi viri iudicium parui facere, hic illi breuiter reſpondebo, & appendici appendicem reponam.

Concluſionem igitur oppugnatam ſic demonſtro.

Datur aſſertio quæ directè ex ſua con-

tradictoria

tradictoria inferatur. Talis in prop. 12. l. 9. Eucl. eſt hæc: *numerus E metitur numerum A*, quæ demonſtratione affirmatiua infertur ex ſuâ cõtradictoriâ: *E non metitur numerum A*. Quod quidem eſt æquè certum, ac demonſtrationem illam eſſe legitimam? Talis in Elementis hiſce noſtris prop. 4. l. 11. eſt hæc: b *Recta B Q non eſt perpendicularis plano C A F*, quæ affirmatiuè deducitur ex ſua contradictoriâ: c *recta B Q eſt perpendicularis plano C A F*. Talis in propoſitione noſtra 35. l. 5. eſt hæc: *A eſt ad B, vt E ad Z*, quæ directè infertur ex ſua contradictoriâ: *A non eſt ad B, vt E ad Z*. Tales denique reperiuntur apud Cardanum l. 5. de proport. p. 201. apud Theodoſium (commentante Clauio) l. 1. ſph. p. 12. & nos plures ſimiles poſſumus exhibere tum Geometricas tum alias.

b Fig. 12. l. 11 tab. 5.
c Fig. 20. l. 5 tab. 3.

Ecce tibi coſmographicam vnam, quam in ijſdem theſibus diſputandam propoſui. *Maris, omniſq; adeo humidi ſuperficies eo ipſo concluditur eſſe ſphærica, quo id negas*. Ponatur vera eſſe eius contradictoria: *Maris ſuperficies ſphærica non eſt*. Quoniã igitur maris ſuperficies ſphærica non eſt; ergo omnes ſuperficiei maritimæ partes non diſtant æqualiter à centro. Ergo vnà eſt altior altera, (altiorem enim eſſe non aliud eſt, quam longiùs à centro recedere.) Ergo ex quæ altiores ſunt, defluunt verſus minùs altas ſeu decli-

diores, hanc enim eſſe humidi naturam ex-perientiâ conſtat. Ex tali autem defluxû neceſſariò oritur omnium partium ſuperfi-ciei maritimæ æqualis altitudo, ſeu diſtantia à centro. Æqualis verò omnium partium ſuperficiei maritimæ à centro diſtantia in-fert ſphæricitatem eius perfectam: *Ergo ma-ris ſuperficies ſphærica eſt.*

Habemus igitur hanc: *Maris ſuperficies ſphærica eſt*, directè & affirmatiuè deductam ex ſuâ contradictoriâ; *maris ſuperficies ſphæ-rica non eſt.*

Maneat igitur extra omnem controuer-ſiam eſſe, dari aſſertiones, quæ directè ex ſuis contradictorijs inferantur. Atqui aſſer-tio, quæ ex ſua contradictoria directè in-fertur, neceſſariò vera eſt, (cùm ſit axioma per ſe clariſſimum, id neceſſariò verum eſſe quod ſuum contradictorium deſtruit; de-ſtruit autem ſuum contradictorium, quod ex ſuo contradictorio directè ſequitur.) Er-go & aſſertionis contradictoria, ex qua vi-delicet deducta eſt aſſertio, falſa eſt. Ergo ex falſo directè & affirmatiuè deductum eſt verum. Demonſtrata igitur eſt concluſio in theſibus propoſita.

Quòd vero eiuſmodi demonſtratiò, quâ aſſertiò ex ſuâ contradictoriâ falsâ directè infertur, verè ſcientiam pariat, ſic vt abſque vlteriori vllâ deductione ad impoſſibile, de

aſſertionis veritate ſecuri eſſe debeamus, ex iam dictis manifeſtum eſt, cum lumine naturæ notiſſimum ſit, id neceſſariò verum eſſe, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt quod ex ſuo contradictorio ſequelâ legitimâ & neceſſariâ infertur. Quod ſi verum deducatur ex falſo quopiam ſibi non contradictorio, nequaquam talis ratiocinatio ſcientiam pariet, neque enim de veritate aſſertionis ſic deductæ ſecuri eſſe poſſumus, cum in ea ratio iam allata deficiat, & proprium falſo ſciamus eſſe, vt ex eo falſa deducantur.

His ritè perceptis facilè eruditus Lector perſpiciet, nihil opus eſſe, vt ſingulis Clariſſimi Viri obiectionibus & argumentis refellendis immoremur, quæ vel contra me nihil faciant, vel ex iam dictis ſoluta intelligantur. Quia tamen non omnibus ad manum erit opus clariſſimi Viri, viſum eſt ſingula breuiter attingere.

Primùm ſupponit ex Dialectica quædam de conſequentiâ directâ; & dicto (vt vocant) de omni & de nullo. Tum ſententiam exponit ſuam noſtræ oppoſitam. Subiungit deinde: *hanc ſententiam meam ſtabilio euerſione omnium illorum, quæ in contrarium afferri poſſe videntur.*

Primum (inquit) *quod ex falſis verum concludere videatur conſtituit huiuſmodi ſyllogiſmus:*

omnis

omnis leo eſt lapis. Omnis adamas eſt leo. Ergo omnis adamas eſt lapis. In quo &c. Tali ſyllogiſmo ad probandam aſſertionem meam ego non vtor, in quo videlicet verum deducitur ex falſo non contradictorio, qui proinde etiam, vt oſtendi ſupra, ſcientiam non parit. Primum iſtud igitur me non tangit.

Secundum genus obiectionum (inquit) *conſtituunt hypotheſes Aſtronomicæ &c. Quæ licet fictitiæ tantùm ſint & falſæ; tamen iuxta eas calculum eclipſibus, & alijs obſeruationibus cæleſtibus conuenientem Aſtronomi exhibent.* Deinde poſtquam multis contendit, hinc non probari verum ex falſo directè elici, *Progredior* (inquit) *ad tertiam inſtantiam, quam ex regula falſi depromere licet* &c. contenditque rurſum hic non elici ex falſo verum. Quo quidem in vtroque, cum illi ego planè aſſentiar, neque vllum inde pro aſſertione meâ argumentum petam, non me magis illa tangunt, quam primum.

Vltimas denique obiectiones (inquit) *nobis faceſſunt, modi demonſtrandi ab Euclide 9. elem. p. 12. Cardano l. 5. de proport. p. 201. & Theodoſio l. 1. ſph. p. 12 adhibiti*, quò me digitum intendiſſe putat, & verè. Ex his ſiquidem demonſtrandi modis, euidenter iam demonſtraui ſupra, ex falſo elici directè verum; neque affertur quidquam à Clariſſimo Viro, quod de-

demonſtrationem noſtram infirmet. Verb Clauij ad p. 12. lib. 9. recitatis, ſubiungit ex eodem Clauio demonſtrationem p. 12. l. 1. ſph. Theodoſij: Tum (inquit) *ut verum fateor, neſcio ſanè, quid Clauio in mentem venerit, uti & Cardano, quare inſolitum hunc & mirabilem argumentandi modum eſſe putauerint, qui tamē Logicis valdè familiaris eſt & duobus principijs omnium euidentiſſimis & natura notiſſimis nititur, hiſce nempè: quodidem non poſſit ſimul eſſe & non eſſe, item quodlibet aut ſit aut non ſit.* Quid Clauio, Cardano, & cum iſtis alijſque etiam mihi, in hac argumentandi forma ſit viſum mirabile, dicere in promptu eſt; hoc nimirum quod aſſertio probanda (G eſt centrum ſphæræ,) directè ex ſuâ contradictoriâ (G non eſt centrum ſphæræ) cōſequentijs legitimis ac neceſſarijs deducatur. Quod quidem quotieſcunque euenit, admiratione dignum eſt. Tantùm verò abeſt, vt hæc ratio demonſtrandi Logicis valdè familiaris ſit, vt etiam non defuerint doctiſſimi viri, quibus ea impoſſibilis videretur. Vt deinde oſtendat vir Clariſſ. hoc diſcurſu verum ex falſo non deduci, repetit demonſtrationem propoſitionis Theodoſianę ſed formâ planè diuerſâ à Clauianâ illâ, quā prius recitauerat, in quâ vis argumentationis inter nos controuerſæ clariſſimè cernitur. Subiūgit denique: *neque ego tam lynceus ſum vt ex-*

inde

inde videre queam, quo pacto ex falſo verum di-rectè ſequatur. Illud tamen video, quod ſi G de-monſtretur non eſſe centrũ ſphæræ, (vult, credo, dicere ponatur, cum demonſtrari nequeat, quod falſum eſt) neceſſariò ſit admittenda con-tradictoria eius affirmatiua, quod G ſit centrum ſphæræ. Ad hæc verba repetam compendio demonſtrationem ſuperiùs datam, quâ, opi-nor, fiet, vt V. C. tametſi, quod eſt maximè, lynceus non eſſet, clarè perſpiciat elici di-rectè ex falſo verum.

Quoniam admittit (id quod etiam eo non dante euinceret Clauiana demonſtratio) ſi G ponatur non eſſe centrum, ſequi neceſſi-tate abſolutâ & formali G eſſe centrũ: ma-nifeſtum eſt, G eſſe centrum, directè ſequi ex ſuâ contradictoriâ, G non eſt centrum. Ergo ex vi deductionis conſtat verum eſſe quod G ſit centrum, cum lumine naturali notum ſit id eſſe neceſſariò verum, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt quod ex ſuo contradictorio directè ſequi-tur. Habemus igitur quod ex hac: (G non eſt centrum) directè deducta ſit hæc vera; (G eſt centrum.) Atqui hæc (G non eſt cẽ-trum) falſa eſt, cum iam oſtenderim veram eſſe hanc (G eſt centrum.) Ergo verum directè deductum eſt ex falſo.

Hæc ſunt, Erudite Lector, quæ ſuper hac quæſtione breuiter hic putaui apponen-

da.

da. Cæterùm nihil dubito quin Clariſſimus Lipſtorpius eâdem animi æquitate reſponſionem hanc noſtram ſit accepturus, qui fecit oppugnationem ſuam, & ego illam accepi.

FINIS.



AD

AD COMPACTOREM.

Sex tabulæ figurarum affigentur hoc ordine

Tabula 1. ante pag 1. Tab. 2. ante pag. 49.
Tab. 3. ante pag. 103. Tab. 4. ante pag. 181.
Tab. 5. ante pag. 221. Tab. 6. ante pag. 269.

Affigentur autem ſic, vt cum explicatæ fuerint, manente intra librum folio albo, figuræ totæ extra librum in conſpectum veniant, complicatæ autem intra libri margines præciſè recipiantur. Expediet verò ita complicari, vt figuræ, etiam dum complicatæ fuerint, aſpectui pateant.

AV RELIEVR.

Les ſix planches de figures ſeront inſerées à l'ordre qui ſuit

La 1. planche deuant la 1. page. 2. planche deuant 49. p.
3. planche deuant 103. p. 4. planche deuant 181. p.
5 planche deuant 221. p. 6 planche deuant. 269. p.

Or il faut attacher en ſorte, que la planche eſtant ouuerte, toute la figure paſſe preciſement la tranche du liure, & qu' ainſi elle paroiſſe entierement, bien qu'on referme le liure : il faut pourtant qu' eſtant pliée elle s' ainſle auec le reſte de feuilles. Il ſera auſſi à propos, de les plier en ſorte, que les figures ſe voyent, & que le dos en ſoit caché.

TOT DEN BINDER.

De ſes plaeten ſalmen op haer plaetſe binden als volcht

De 1. plaete voor pag. 1. 2. plaete voor pag. 49.
3. plaete voor pag. 103. 4. plaete voor pag. 181.
5. plaete voor pag. 221. 6 plaete voor pag. 269.

Men ſal de plaeten alſoo binden, dat het blat opengheuauden ſijnde, de vvitte ſijde blijue binnen den boeck, ende d'andere met de figuren ſy gheheel daer buyten. Is oock gheraeden het blat alſoo toe te vauvven, dat de figuren, oock toeghevaut ſijnde, konnen gheſien vvorden.

AD COMPACTOREM.

Sex tabulæ figurarum affigentur hoc ordine

Tabula 1. ante pag 1. *Tab. 2. ante pag. 49.*
Tab. 3. ante pag. 103. *Tab. 4. ante pag. 181.*
Tab. 5. ante pag. 221. *Tab. 6. ante pag. 269.*

Affigentur autem ſic, vt cum explicatæ fuerint, manente intra librum folio albo, figuræ totæ extra librum in conſpectum veniant, complicatæ autem intra libri margines praciſè recipiantur. Expediet verò ita complicari, vt figuræ, etiam dum complicatæ fuerint, aſpectui pateant.

AV RELIEVR.

Les ſix planches de figures ſeront inſerées à l'ordre qui ſuit

La 1. planche deuant la 1. page. 2. planche deuant 49. p.
3. planche deuant 103. p. 4. planche deuant 181. p.
5 planche deuant 221. p. 6 planche deuant. 269. p.

Or il faut attacher en ſorte, que la planche eſtant ouuerte, toute la figure paſſe preciſement la tranche du liure, & qu' ainſi elle paroiſſe entierement, bien qu'on referme le liure : il faut pourtant qu' eſtant pliée elle s' ainſſe auec le reſte de feuilles. Il ſera auſſi à propos, de les plier en ſorte, que les figures ſe voyent, & que le dos en ſoit caché.

TOT DEN BINDER.

De ſes plaeten ſalmen op haer plaetſe binden als volcht

De 1. plaete voor pag. 1. *2. plaete voor pag. 49.*
3. plaete voor pag. 103. *4. plaete voor pag. 181.*
5. plaete voor pag. 221. *6 plaete voor pag. 269.*

Men ſal de plaeten alſoo binden, dat het blat open-ghevauden ſijnde, de vvitte ſijde blijue binnen den boeck, ende d'andere met de figuren ſy gheheel daer buyten. Is oock gheraeden het blat alſoo toe te vauvven, dat de figuren, oock toeghevaut ſijnde, konnen gheſien vvorden.